This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

531.6 .P711 ED.2 C.2
... Das prinzip der er
Stanford University Libraries
3 6105 046 476 037

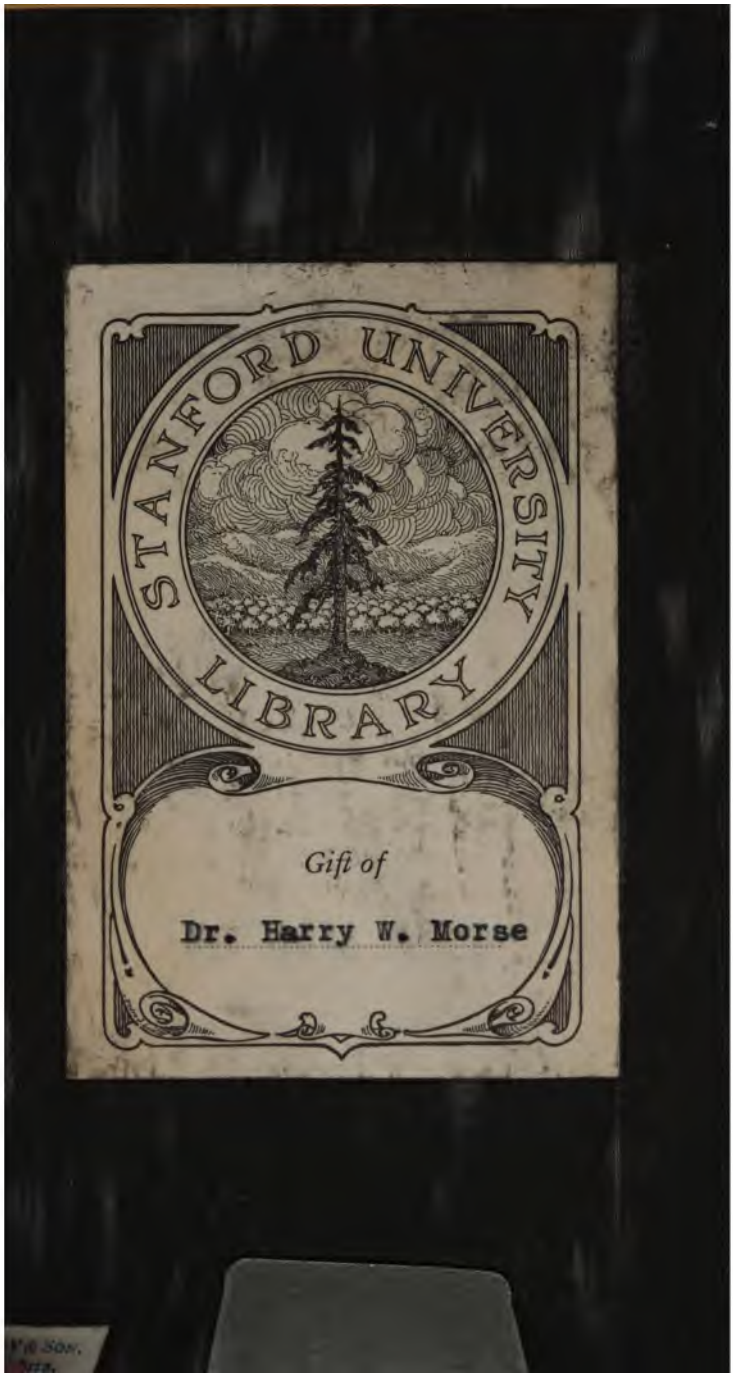
WISSENSCHAFT UND HYPOTHESE
VI

MAX PLANCK

DAS PRINZIP DER ERHALTUNG DER ENERGIE

ZWEITE AUFLAGE

B. G. TEUBNER IN LEIPZIG UND BERLIN


STANFORD UNIVERSITY
LIBRARY
Gift of
Dr. Harry W. Morse

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin.

Wissenschaft und Hypothese

Sammlung von Einzeldarstellungen aus dem Gesamtgebiet der Wissenschaften mit besonderer Berücksichtigung ihrer Grundlagen und Methoden, ihrer Endziele und Anwendungen.

Es ist ein unverkennbares Bedürfnis unserer Zeit, die in den verschiedenen Wissensgebieten durch rastlose Arbeit gewonnenen Erkenntnisse von umfassenden Gesichtspunkten aus im Zusammenhang miteinander zu betrachten und darzustellen. Nicht um spezielle Monographien handelt es sich also, sondern um Darstellung dessen, was die Wissenschaft erreicht hat, was sie früher oder später noch erreichen kann, und welches ihre wesentlichen und aus der Tiefe ihres Wirkens entspringenden Probleme sind. Die Wissenschaften in dem Bewußtsein ihres festen Besitzes, in ihren Voraussetzungen darzustellen und ihr pulsierendes Leben, ihr Haben, Können und Wollen aufzudecken, soll die Aufgabe sein; andererseits aber soll in erster Linie auch auf die durch die Schranken der Sinneswahrnehmung und der Erfahrung überhaupt bedingten Hypothesen hingewiesen werden.

Bisher erschien in dieser Sammlung:

I. Band: **Wissenschaft und Hypothese.** Von Henri Poincaré, membre de l'Académie, Paris. Deutsch von L. und F. Lindemann-München. 2. Aufl. 1906. Geb. ℳ 4.80.

Dies Buch behandelt in den Hauptstücken: Zahl und Größe, den Raum, die Kraft, die Natur, die Mathematik, Geometrie, Mechanik und einige Kapitel der Physik. Zahlreiche Anmerkungen des Herausgebers kommen dem allgemeinen Verständnis noch mehr entgegen und geben dem Leser wertvolle literarische Angaben zu weiterem Studium.

II. Band: **Der Wert der Wissenschaft.** Von Henri Poincaré, membre de l'Académie, Paris. Deutsch von E. und H. Weber-Straßburg. Mit einem Bildnis des Verfassers. 1906. Geb. ℳ 3.60.

Der geistvolle Verfasser gibt einen Überblick über den heutigen Standpunkt der Wissenschaft und über ihre allmähliche Entwicklung, wie sie sowohl bis jetzt vor sich gegangen ist, als wie er sich ihre zukünftigen Fortschritte denkt. Das Werk ist für den Gelehrten zweifellos von größtem Interesse, durch seine zahlreichen Beispiele und Erläuterungen wird es aber auch jedem modernen Gebildeten zugänglich gemacht.

III. Band: **Mythenbildung und Erkenntnis.** Eine Abhandlung über die Grundlagen der Philosophie. Von G. F. Lipps-Leipzig. 1907. Geb. ℳ 5.—

Der Verfasser zeigt, daß erst durch die Widersprüche, die mit dem naiven, zur Mythenbildung führenden Verhalten unvermeidlich verknüpft sind, der Mensch auf die Tatsache aufmerksam wird, daß sein Denken die Quelle der Erkenntnis ist — er wird kritisch und gelangt zu der kritischen Weltbetrachtung. Die Entwicklung der kritischen Weltbetrachtung stellt die Geschichte der Philosophie dar.

IV. Band: **Die nichteuklidische Geometrie.** Historisch-kritische Darstellung ihrer Entwicklung. Von R. Bonola-Pavia. Deutsch von H. Liebmann-Leipzig. 1908. Geb. ℳ 5.—

In der vom Verfasser und Übersetzer erweiterten deutschen Ausgabe wird wohl nicht nur den Mathematikern ein Gefallen erwiesen, sondern vor allem auch den vielen, welche mit elementaren mathematischen Vorkenntnissen ausgestattet, Ziele und Methoden der nichteuklidischen Geometrie kennen lernen wollen. Man wird in der elementar gehaltenen und flüssigen Darstellung die Antwort auf viele Fragen finden, wo andere nur dem gründlich vorgebildeten Mathematiker zugängliche Quellen versagten.

V. Band: **Ebbe und Flut, sowie verwandte Erscheinungen im Sonnensystem.** Von G. H. Darwin-Cambridge. Deutsch von A. Pockels-Braunschweig. Mit einem Einführungswort von G. v. Neumayer. 43 Illustrationen. 1902. Geb. ℳ 6.80.

Nach einer Übersicht über die Erscheinungen der Ebbe und Flut, der Seeschwankungen, der besonderen Flutphänomene sowie der Beobachtungsmethoden werden in sehr anschaulicher, durch Figuren erläuterter Weise die fluterzeugenden Kräfte, die Theorien der Gezeiten sowie die Herstellung von Gezeitentafeln erklärt. Die folgenden Kapitel sind geophysikalischen und astronomischen Fragen, die mit der Einwirkung der Gezeitenkräfte auf die Weltkörper zusammenhängen, gewidmet.

VI. Band: **Das Prinzip der Erhaltung der Energie.** Von Max Planck-Berlin. 2. Auflage. 1908. Geb.

In drei Abschnitten wird behandelt: die historische Entwicklung des Prinzips von seinen Uranfängen bis zu seiner allgemeinen Durchführung in den Arbeiten von Mayer, Joule, Helmholtz, Clausius, Thomson; die allgemeine Definition des Energiebegriffs, die Formulierung des Erhaltungsprinzips nebst einer Übersicht und Kritik über die versuchten Beweise; schließlich die Darlegung, wie man durch Anwendung des Prinzips unabhängig von jeglichen Hypothesen über das Wesen der Naturkräfte zu einer einheitlichen Übersicht über die Gesetze der gesamten Erscheinungswelt gelangen kann.

Unter der Presse:

Grundlagen der Geometrie. Von D. Hilbert-Göttingen. 3. Auflage.

Das Wissen unserer Zeit in Mathematik und Naturwissenschaft. Von É. Picard-Paris. Deutsch von L. und F. Lindemann-München.

In Vorbereitung befinden sich (genaue Fassung des Titels bleibt vorbehalten):

Anthropologie und Rassenkunde. Von E. v. Baelz-Stuttgart.

Wissenschaft und Religion. Von É. Boutroux, membre de l'Institut, Paris. Deutsch von E. Weber-Straßburg.

Prinzipien der vergleichenden Anatomie. Von H. Braus-Heidelberg.

Die Erde als Wohnsitz des Menschen. Von K. Dove-Jena.

Probleme der Wissenschaft. Von F. Enriques-Bologna. Deutsch von K. Grelling-Göttingen.

Das Gesellschafts- und Staatenleben im Tierreich. Von K. Escherich-Tharandt.

Erdbeben und Gebirgsbau. Von Fr. Frech-Breslau.

Die pflanzengeographischen Wandlungen der deutschen Landschaft. Von H. Hausrath-Karlsruhe.

Reizerscheinungen der Pflanzen. Von L. Jost-Bonn-Poppelsdorf.

Blumen und Insekten. Von O. Kirchner-Hohenheim.

Geschichte der Psychologie. Von O. Klemm-Leipzig.

Die Materie im Kolloidalzustand. Von V. Kohlschütter-Straßburg i. E.

Vorfahren und Vererbung. Von F. Le Dantec. Deutsch von H. Kniep-Freiburg i. B.

Die wichtigsten Probleme der Mineralogie und Petrographie. Von G. Linck-Jena.

Die Erkenntnisgrundlagen der Mathematik und der mathematischen Naturwissenschaft. Von P. Natorp-Marburg.

Die Grammatik exakter Wissenschaft. Von K. Pearson. Deutsch von L. und F. Lindemann-München.

Botanische Beweismittel für die Abstammungslehre. Von H. Potonié-Berlin.

Physiologie der Einzelligen. Von S. v. Prowazek-Hamburg.

Grundfragen der Astronomie, der Mechanik und Physik der Himmelskörper. Von H. v. Seeliger-München.

Meteorologische Zeit- u. Streitfragen. Von R. Süring-Berlin.

Die Sammlung wird fortgesetzt.

Leipzig, Poststraße 3. **B. G. Teubner.**

WISSENSCHAFT UND HYPOTHESE

VI

DAS PRINZIP DER ERHALTUNG DER ENERGIE

VON

Dr. MAX PLANCK

PROFESSOR DER THEORETISCHEN PHYSIK
AN DER UNIVERSITÄT BERLIN

VON DER PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT
GÖTTINGEN PREISGEKRÖNT

ZWEITE AUFLAGE

STANFORD LIBRARY

LEIPZIG UND BERLIN
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1908

492810

ALLE RECHTE,
EINSCHLIESSLICH DES ÜBERSETZUNGSRECHTS, VORBEHALTEN.

Vorwort zur ersten Auflage.

Die Veranlassung zur Entstehung der vorliegenden Schrift gab ein Preisausschreiben, welches die Göttinger philosophische Fakultät für das Jahr 1887 zur Benekeschen Preisstiftung erlassen hatte. Die Aufgabe, welche im Jahre 1884 gestellt war, lautete wie folgt:

„Seit Thomas Young (Lectures on Natural Philosophy, London 1807, Lecture VIII) wird den Körpern von vielen Physikern Energie zugeschrieben, und seit William Thomson (Philosophical Magazine and Journal of Science, IV Series, London 1855, p. 523) wird häufig das Prinzip der Erhaltung der Energie als ein für alle Körper gültiges ausgesprochen, worunter dasselbe Prinzip verstanden zu werden scheint, was schon früher von Helmholtz unter dem Namen des Prinzips der Erhaltung der Kraft ausgesprochen war.

Es wird nun zunächst eine genaue historische Entwicklung der Bedeutung und des Gebrauchs des Wortes Energie in der Physik verlangt; sodann eine gründliche physikalische Untersuchung, ob verschiedene Arten der Energie zu unterscheiden und wie jede derselben zu definieren sei; endlich in welcher Weise das Prinzip der Erhaltung der Energie als allgemein gültiges Naturgesetz aufgestellt und bewiesen werden könne."

Der Ideengang, der mich in der Bearbeitung dieser Aufgabe leitete, sowie das Ziel, welches mir dabei vor Augen schwebte, dürfte am klarsten zur Darstellung kommen, wenn ich aus den Bemerkungen, von denen die Einsendung

meiner Arbeit an das Preisgericht begleitet war, das Wesentliche mitteile:

. . . . . „Zuvörderst sei es mir gestattet, über den Plan und die Ausführung der Arbeit einige einleitende Bemerkungen vorauszuschicken. Schon von jeher für die Lehre von der Energie von besonderem Interesse erfüllt, lag mir der Gedanke, sie durch die Bearbeitung der gestellten Preisaufgabe zum Gegenstand einer ausführlicheren Arbeit zu machen, um so näher, als ich persönlich oft den Mangel eines Werkes empfand, welches, in erster Linie für den Physiker von Fach berechnet, die mannigfachen Formen und Anwendungen, deren der Energiebegriff fähig ist, und die sich von verschiedenen Autoren in der verschiedensten Weise dargestellt finden, unter einen gemeinsamen Gesichtspunkt vereinigt. Denn so viel in den letzten 40 Jahren bereits über die Lehre von der Energie geschrieben und gesprochen worden ist, so sind doch — mit alleiniger Ausnahme der Helmholtzschen Abhandlung über die Erhaltung der Kraft vom Jahre 1847 — alle darauf bezüglichen Publikationen, sofern sie den allgemeinen Begriff der Energie und nicht etwa nur spezielle Anwendungen desselben, etwa auf die Wärmelehre, behandeln, in erster Linie für einen weiteren Kreis von Lesern berechnet: von den Schriften J. R. Mayers an bis zu den umfangreicheren Werken von A. Secchi, G. Krebs, Balfour Stewart u. a. m.

„Es ist also im wesentlichen ein praktisch-physikalisches Bedürfnis, dem ich mit der vorliegenden Schrift zu genügen trachte, und ich hoffe nur, daß sich diese Auffassung nicht zu weit von dem Sinn der gestellten Aufgabe entfernt, um noch als eine Bearbeitung derselben gelten zu können. — Die angedeutete Beschränkung erwies sich mir übrigens auch mit Rücksicht auf die Beschaffenheit des zu bewältigenden Stoffes als sehr gelegen, da derselbe mir während der Vorarbeiten zu solchen Dimensionen anschwoll, daß ich ohne ein durchgreifendes Sichten des ganzen Materials

fürchten mußte, die Einheit der Darstellung, auf die es mir hauptsächlich ankam, zu gefährden. So durfte ich vor allen Dingen die Besprechung aller über das rein physikalische Gebiet hinausgehenden philosophischen Spekulationen, die an den Begriff der Energie häufig genug geknüpft worden sind, einfach übergehen; ferner konnte ich, der physikalischen Auffassung entsprechend, der ich auch in der Wahl des Titels Ausdruck gegeben habe, den Hauptnachdruck der Untersuchung stets auf das Prinzip der Erhaltung der Energie legen, während ich den Begriff der Energie nur insofern eingehend behandelte, als er mit dem Prinzip in Zusammenhang gebracht werden kann, von dem Gedanken ausgehend, daß der Begriff der Energie seine Bedeutung für die Physik erst durch das Prinzip gewinnt, welches ihn enthält. Auf der anderen Seite erschien es mir im Hinblick darauf, daß die Spuren der Existenz des Begriffes der Energie doch noch beträchtlich weiter in die Vergangenheit zurückreichen als der Gebrauch des Wortes, unerläßlich, der historischen Entwicklung des Begriffes, schon vor seiner Benennung durch Th. Young, wenigstens in aller Kürze zu gedenken.

„Im übrigen war es natürlich mein Bestreben, die Darstellung so eng als möglich an den Wortlaut der Aufgabe anzuschließen; insbesondere habe ich ihm entsprechend eine Einteilung in drei Hauptabschnitte vorgenommen: Historische Entwicklung, verschiedene Arten der Energie, Formulierung und Beweis des Prinzips der Erhaltung der Energie. Dabei habe ich mir allerdings, Erwägungen folgend, die sich zum Teil erst im Verlauf der Ausarbeitung selber geltend machten, eine Umstellung der Titel insofern erlaubt, als ich den in der Aufgabe an dritter Stelle genannten Abschnitt dem zweiten vorausschickte. Erschien mir einerseits diese Änderung der Ordnung als zu unwesentlich, um auf ernstliche Bedenken zu stoßen, so glaubte ich andrerseits den Intentionen des Aufgabestellers durch möglichste Rücksicht-

nahme auf die Übersichtlichkeit der Behandlung besser gerecht zu werden, als wenn ich durch allzu ängstliches Anklammern an den Buchstaben den lebendigen Zusammenhang, so wie er meinem Gefühl nun einmal vorschwebte, beeinträchtigt hätte.

„Nach dem schon oben dargelegten Ausgangspunkt meiner Auffassung liegt der Schwerpunkt der ganzen Arbeit im zweiten und dritten Abschnitt; doch habe ich auch dem ersten viel Mühe und Sorgfalt zugewendet; namentlich glaube ich die Zahl der irgendwie bemerkenswerten Tatsachen vollständig erschöpft zu haben, ebenso wie ich für die Richtigkeit aller Angaben und Zitate einstehen zu können glaube, die ich, soweit die betr. Arbeiten mir irgend zugänglich waren, stets eingehend kontrolliert habe.

„Es ist eine alte Erfahrung, daß fast jede wissenschaftliche Entdeckung von einiger Tragweite öfters als einmal, und von verschiedenen Forschern unabhängig voneinander, gemacht wird. Ebenso häufig trifft es aber auch zu, daß, sobald die Entdeckung einigermaßen an Ansehen gewinnt, sich sogleich eine ganze Anzahl von Bewerbern einstellen, die auf den Ruhm der Priorität Anspruch erheben. Diese Fragen, welche bekanntlich gerade in bezug auf das Prinzip der Erhaltung der Energie auf das lebhafteste ventiliert worden sind, und unter anderem leider auch zu maßlosen Angriffen gegen Persönlichkeiten geführt haben, die mit in erster Reihe an dem Ausbau der physikalischen Wissenschaften arbeiten, sind in der vorliegenden Schrift nur insoweit berührt worden, als die objektive Darstellung der historischen Entwicklung des Prinzips mir zu erfordern schien. Zum Richter in derartigen Angelegenheiten darf ich mich um so weniger berufen fühlen, als ja viele der Männer noch am Leben sind, die durch ihr persönliches Zeugnis das kompetenteste Urteil zu sprechen vermögen. Nur eine kurze allgemeinere Bemerkung sei mir hier anzufügen gestattet. Gewiß hat derjenige, der einen bedeutenden Gedanken

zum erstenmal ausspricht, ein bleibendes Verdienst gewonnen; allein es wird immer darauf ankommen zu prüfen, ob er sich auch der Tragweite dieses Gedankens vollauf bewußt war und ob er mit diesem Gedanken etwas anzufangen und ihn weiter auszubilden verstand. Wenn man diese Bedingung bei der Beurteilung von Prioritätsstreitigkeiten mit anlegt, so wird man sicher die Zahl der Konkurrenten bedeutend einschränken müssen. Es ist heutzutage fast Mode geworden, in den Schriften älterer Physiker und Philosophen nach Aussprüchen zu forschen, die an das Prinzip der Erhaltung der Energie oder an die mechanische Theorie der Wärme erinnern; vieles hat man in dieser Richtung schon gefunden und würde bei weiterem Suchen ohne Zweifel noch viel mehr finden. So wichtig indes die Feststellung der Tatsache erscheint, daß gewisse Ideen, schon lange bevor sie als reife Frucht der Menschheit als Gemeingut übermacht wurden, in den Köpfen einzelner hervorragender Geister in aller Stille heranwuchsen, so darf man doch nicht einseitig das Verdienst der Entdeckung denen zuerkennen, die vielleicht noch gar keine Ahnung hatten von der Entwicklungsfähigkeit des Keimes, den ein gelegentlich von ihnen geäußerter Gedanke in sich barg.

„Wenn es sich darum handelt, die Bedeutung eines physikalischen Satzes für die Erforschung der Gesetze der Erscheinungswelt klar zu legen, so ist es vor allen Dingen notwendig, den Inhalt des Satzes mit solchen Tatsachen in Vergleich zu bringen, die durch die Erfahrung mit vollständiger Sicherheit festgestellt erscheinen, und je tiefer und umfassender die Bedeutung ist, welche man dem zu untersuchenden Satze beimißt, um so enger muß man sich an die unmittelbaren Ergebnisse der Beobachtung anschließen, die doch den allein zuverlässigen Ausgangspunkt aller Naturwissenschaft bilden. Dies gilt in hervorragendem Maße von dem Prinzip der Erhaltung der Energie, einem Satze von so universaler, in alle naturwissenschaftliche Theorien tief

eingreifender Wirkung, daß man ihn nicht sorgfältig genug von allen hypothetischen Vorstellungen reinigen kann, die man sich zur Erleichterung der Übersicht über den gesetzlichen Zusammenhang der verschiedenartigen Naturerscheinungen so leicht zu bilden geneigt ist. Denn zieht man irgend eine zweifelhafte Voraussetzung, irgend eine unbewiesene Hypothese in die Untersuchung hinein, so prüft man nicht das Prinzip an sich, sondern zugleich jene Hypothese, und eine etwaige Differenz zwischen Theorie und Erfahrung wird dann nicht allein auf Rechnung des Prinzips, sondern ebenso gut auf die der Hypothese zu setzen sein. Von dieser Erwägung ausgehend glaubte ich in der Darstellung ein Hauptaugenmerk stets darauf richten zu sollen, den Begriff und das Prinzip der Energie vor allem auf reine Erfahrungstatsachen aufzubauen, mit möglichster Vermeidung aller Hypothesen, einschließlich der verschiedenen Molekularhypothesen, wenn sich auch einige derselben in der neueren Zeit einen beachtenswerten Platz in der Wissenschaft erobert haben. So habe ich auch das Carnot-Clausiussche Prinzip: den sogenannten zweiten Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie, mit seinen Folgerungen grundsätzlich von der Untersuchung ausgeschlossen, weil er sich seinerseits erst aus dem Energieprinzip entwickelt, indem er ihm ein ganz neues Element: die Bedingungen der Umwandlung der verschiedenen Energiearten ineinander hinzufügt.[1]) Ich beabsichtige eventuell, ihn zum Gegenstand einer besonderen Arbeit zu machen.

1) [Anm. 1908. Die Notwendigkeit einer sorgfältigen Trennung der beiden Hauptsätze der Wärmetheorie voneinander besteht heute mehr als jemals, da es z. B. auch jetzt noch vorkommt, daß zwei so wesensverschiedene Vorgänge, wie der Übergang von Wärme von höherer zu tieferer Temperatur, und das Herabsinken einer schweren Flüssigkeit von höherem zu tieferem Niveau, insofern durcheinandergeworfen werden, als man glaubt, sie beide auf einen einzigen Satz, den „zweiten Hauptsatz der Energetik", zurückführen zu können. In Wirklichkeit läßt sich nur der zweite der beiden genannten Vor-

„Erst wenn so der Boden, auf dem die Lehre von der Energie ruht, sicher fundiert ist, darf man beginnen, sie auf entlegenere Gebiete der Forschung zu übertragen; dann soll aber das Prinzip nicht mehr an und für sich untersucht werden, sondern es dient umgekehrt als Richtschnur, um andere Hypothesen daran zu prüfen. In dieser Beziehung bin ich so weit gegangen, als es mir die schließlich noch zur Verfügung stehende Zeit erlaubte; eine vollständige Übersicht zu geben über alle einzelnen Anwendungen, die je von dem Prinzip gemacht worden sind, konnte mir nicht in den Sinn kommen, doch glaube ich immerhin, wenn auch natürlich nicht in der Zahl der äußeren Tatsachen, so doch in der Art der Auffassung einiges neue beigebracht zu haben.

„Schließlich fühle ich mich noch verpflichtet, der hohen Fakultät meinen aufrichtigen Dank auszusprechen für die vielseitige wissenschaftliche Anregung und Förderung, die mir durch die Bearbeitung dieser reichen und schönen Aufgabe zu Teil geworden ist.“ —

Außer meiner Bearbeitung der Aufgabe gingen noch zwei andere ein, welche nicht gekrönt wurden. Das Urteil der Fakultät über die meinige lasse ich im Wortlaut folgen:

„Im ersten Abschnitt verbindet der Verfasser die Entwicklung des Energiebegriffes mit einer ausführlichen Geschichte des Äquivalenzsatzes der mechanischen Wärmetheorie, welche von seinem gesunden und selbständigen Urteil, von seiner eingehenden Bekanntschaft mit den Quellen das vorteilhafteste Zeugnis ablegt. Mit großer Klarheit und genauester Sachkenntnis werden die epochemachenden Leistungen dargestellt, welche das Prinzip vorbereitet und begründet haben; die Kontinuität der Entwicklung wird durch eine auf feinem wissenschaftlichen Gefühle ruhende

---

gänge aus dem Energieprinzip ableiten (S. 189 unten), während der erste bis jetzt nicht anders als durch Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen erklärt werden kann. (Vgl. S. 64.)]

Wertschätzung der Zwischenglieder gewahrt. Daß auch der allmählichen Ausbreitung des Prinzips, seiner Anwendung auf die verschiedenen Gebiete der Physik eine sehr ausführliche Darstellung gewidmet worden ist, war für die Arbeit nicht eben günstig. Es ist dem Verfasser in diesem Teile derselben nicht immer gelungen, den Eindruck ermüdender Wiederholung zu vermeiden, und die Beschränkung, welche er der Freiheit seiner Darstellung durch das Voranstellen des rein historischen Gesichtspunktes auferlegt hat, wird hier besonders fühlbar. Für die Ökonomie des Ganzen würde es besser gewesen sein, einen Teil des hier verarbeiteten Stoffes dem zweiten oder dritten Teile zu überweisen, während auf der anderen Seite noch manches der Berücksichtigung sich dargeboten hätte, wenn der Verfasser sich weniger streng an das Jahr 1860 als Grenze der historischen Entwicklung gebunden haben würde. Der einseitig physikalische Standpunkt, welchen der Verfasser mit vollem Bewußtsein einnimmt, bringt es mit sich, daß er den Anteil, welchen die Technik an der Entwicklung des Energiebegriffes genommen hat, nur flüchtig gestreift, den der philosophischen Ideenkreise gar nicht berücksichtigt hat. Größere Fülle der Darstellung und eingehendere Würdigung dieser Einflüsse würde der Fakultät erwünscht gewesen sein.

„Mit großem Interesse hat die Fakultät von dem zweiten Abschnitte der Abhandlung Kenntnis genommen; hier kommt die methodische Denkart, die gründliche mathematisch-physikalische Bildung des Verfassers, die Besonnenheit seines Urteils zur vollen Geltung. Der Liebe, mit welcher sich der Verfasser in den Gegenstand seiner Untersuchung vertieft hat, entspricht die Sorgfalt, mit welcher er nach allen Richtungen hin denselben aufzuklären weiß. Mit lebhafter Befriedigung konstatiert die Fakultät, daß abgesehen von einigen sachlich unbedeutenden Inkorrektheiten die Frage nach der Formulierung und dem Beweise des Energie-

prinzips in diesem Teile der Abhandlung eine schöne und vollständige Lösung gefunden hat.

„Nicht ebenso unbeschränkt ist die Anerkennung, welcher die Fakultät auch dem letzten Teile der Arbeit gegenüber gerne Ausdruck verleiht. Sie bedauert es, wenn die Beschränkung der Zeit den Verfasser verhindert hat, seiner Darstellung der verschiedenen Arten der Energie die wünschenswerte Vollständigkeit und Gleichmäßigkeit zu erteilen. So anziehend die Betrachtungen des Verfassers sind, so mannigfache Belehrung man daraus zu schöpfen vermag, so vermißt die Fakultät doch eine allgemeinere Untersuchung der Frage, wie viele Energiearten zu unterscheiden und wie jede derselben zu definieren sei. Statt dessen hat sich der Verfasser darauf beschränkt, im einzelnen nachzuweisen, wie in den verschiedenen Gebieten der Physik das Energieprinzip als ein sicheres und einheitliches Fundament der Darstellung zu benützen ist. Die gewandte Behandlung, welche er von diesem Gesichtspunkte aus der Mechanik angedeihen läßt, würde größere Bedeutung gewonnen haben, wenn der Verfasser die Tragweite des von ihm eingeführten Prinzips der Superposition verschiedener Energien einer eingehenderen Kritik unterworfen hätte. Auch würde nach der Auffassung der Fakultät eine etwas eingehendere Betrachtung der Reflexion und Brechung des Lichtes den Rahmen der Aufgabe keineswegs überschritten haben. Ebenso wie die Behandlung der Optik, erscheint auch die der thermischen und chemischen Energie etwas knapp, insbesondere hat der Verfasser eine kritische Besprechung derjenigen Experimentaluntersuchungen unterlassen, auf welchen unsere Kenntnis von dem numerischen Werte des mechanischen Wärmeäquivalentes beruht. Die Bearbeitung der elektrischen und magnetischen Energie bekundet in hinreichendem Maße die umfassenden und gründlichen Kenntnisse, welche der Verfasser auf diesem Gebiete besitzt, dennoch lassen seine Betrachtungen die Klarheit, Konsequenz und Stetigkeit,

welche das Studium seiner Schrift zu einer so angenehmen Aufgabe gemacht haben, in einzelnen Fällen vermissen. Die Fakultät muß endlich den Bemerkungen, durch welche sich der Verfasser mit dem Weberschen Gesetz abzufinden sucht, ihre Zustimmung versagen; sie würde eine eingehende Untersuchung des Weberschen Ideenkreises für notwendig erachtet haben.

„Es wird dem Verfasser nicht schwer fallen, seine Abhandlung in den genannten Punkten vor ihrer Veröffentlichung zu ergänzen. In dieser Hoffnung und in voller Anerkennung des Geleisteten erteilt die Fakultät dieser Abhandlung den zweiten Preis." —

Wenn ich mich dem von der Fakultät ausgesprochenen Wunsche gegenüber dennoch entschlossen habe, die Arbeit im wesentlichen ungeändert der Öffentlichkeit zu übergeben, so ist dies nicht ohne ernste Bedenken und reifliche Überlegung geschehen, da mir doch alles daran gelegen sein mußte, der einmal bis zu einem gewissen Grad vollendeten Arbeit auch diejenige Vollständigkeit und Abrundung zu geben, wie sie von solch hoher Seite für wünschenswert erachtet wird. Indessen: gerade diese Erwägung war es zuerst, die mir ernstliche Zweifel einflößte, ob es mir überhaupt gelingen würde, die von der Fakultät geäußerte Hoffnung zu verwirklichen. Dies gilt namentlich von einer eventuellen Umarbeitung des dritten Abschnitts, besonders des Kapitels über die elektrische Energie, im Sinne der in dem Urteil der Fakultät enthaltenen Bemerkungen. Ich bin selbstverständlich weit entfernt, den Weberschen Ideengängen etwas von der hohen Bedeutung nehmen zu wollen, die sie sich während der letzten Jahrzehnte besonders in Deutschland errungen haben; die mächtige Förderung, die großartige Erweiterung des Überblickes, welche auf dem gesamten Gebiete der Elektrizität und darüber hinaus den Arbeiten des genialen Forschers zu danken ist, liegt ja einem jeden Physiker offen zutage. Aber ebensowenig kann ich

umhin, ja ich erachte es für meine Pflicht, offen zu gestehen, daß ich durch sorgfältiges Studium und reifliches Nachdenken zu der festen Überzeugung gekommen bin, daß die mehr spekulative, auf deduktive Bahnen weisende Richtung, welche Weber einschlagen lehrt, ihre wertvollsten Früchte bereits getragen hat, daß also für die Zukunft ein weiterer wesentlicher Fortschritt von ihr nicht mehr in gleichem Maße zu erwarten steht. Meinem persönlichen Dafürhalten nach dürfte ein solcher für die nächste Zeit vielmehr nur durch engen Anschluß an die induktive Methode zu gewinnen sein, und diesem Standpunkt habe ich in der Darstellung der elektrischen Erscheinungen dadurch Ausdruck zu geben versucht, daß ich mich wesentlich auf die Untersuchung gleichförmiger geschlossener Ströme beschränkte, deren Gesetze ja durch die Erfahrung hinreichend festgestellt sind und die sich auch ohne das allgemeine Webersche Gesetz ableiten lassen, während ich dagegen das Gebiet, in welchem dessen eigentliche Bedeutung anfängt: die Wirkungen ungeschlossener Ströme beziehungsweise bewegter elektrischer Massenpunkte grundsätzlich meiden oder doch nur streifen zu sollen glaubte. Da sich freilich wohl jeder Physiker zur Erhöhung der Übersichtlichkeit über die Erscheinungswelt eine den beobachteten Naturgesetzen möglichst angepaßte Grundanschauung nach seinem persönlichen Geschmack zurechtlegt, so will auch ich gerne bekennen, daß ich mich gegenwärtig zu den Anhängern derjenigen Theorie zähle, welche die Annahme der unmittelbaren Fernewirkung und somit auch den Gedanken an die primäre Existenz eines elektrischen Grundgesetzes nach Art des Weberschen überhaupt aufgibt. Die Entscheidung über diese Frage muß ja allerdings der Zukunft überlassen bleiben, für mich kommt aber dabei der eine wichtige Umstand in Betracht, daß ich mich bei dem eventuellen Versuche einer Umarbeitung im angedeuteten Sinne jedenfalls nicht mit der gleichen Freudigkeit, wie das erstemal, an die Arbeit

machen würde, und diese mußte doch unbedingte Voraussetzung sein, wenn ich darauf rechnen wollte, die für mich so ehrenvollen Erwartungen der Fakultät zu erfüllen. Nehme ich zu dieser Unsicherheit in der Aussicht auf einen befriedigenden Erfolg den Zeitaufwand, der mit einer derartigen Umarbeitung notwendig verbunden wäre, und der mich gerade jetzt, wo ich mich anderen Studien zugewandt habe, doppelt empfindlich treffen würde, sowie die damit verbundene Verzögerung in dem Erscheinen des Werkes, dessen Abschluß nun schon fast um ein Jahr zurückliegt, so glaube ich mich der Hoffnung nicht ganz entschlagen zu dürfen, daß mein Entschluß, es bei einigen redaktionellen Änderungen bewenden zu lassen, und im übrigen doch lieber die Arbeit ganz in der Form, wie sie das im vorigen mitgeteilte Urteil der Fakultät gefunden hat, zu veröffentlichen, auch bei der hohen Fakultät die Entschuldigung finden möchte, an der mir in so hervorragendem Maße gelegen ist.

Kiel, im Juli 1887. Der Verfasser.

Vorwort zur zweiten Auflage.

In den zwanzig Jahren, welche seit dem Erscheinen der ersten Auflage dieses Buches verflossen sind, hat sich in der Physik nach den verschiedensten Richtungen hin eine Reihe von Umwälzungen vollzogen, die in dieser raschen Aufeinanderfolge und in dieser Tragweite völlig beispiellos dastehen: von den großen Hertzschen Entdeckungen angefangen, die im Jahre 1888 einsetzten, bis hin zu der Erschließung des heute noch schier unabsehbaren Gebietes der Radioaktivität. Aber jede neue Entdeckung und jede neue Begriffsbildung hat immer wieder nur dazu geführt, das Prinzip der Erhaltung der Energie in seiner zentralen Stellung zu behaupten und zu befestigen. Einzelne Zweifel und Bedenken gegen die Allgemeingültigkeit des Energie-

prinzips, welche durch gewisse Tatsachen, wie z. B. durch die beständige Wärmeabgabe radioaktiver Substanzen, hier und da geweckt wurden, haben sich leicht als Mißverständnisse erweisen lassen, und nie ist meines Wissens ernstlich auch nur der Versuch gemacht worden, eine physikalische Theorie aufzubauen, in deren Fundament das Prinzip der Erhaltung der Energie keinen Platz fände.

Durch diesen wichtigen Umstand war mir die Möglichkeit gegeben, die in der neuen Auflage vorzunehmenden Verbesserungen auf einige geringe Änderungen und Zusätze zu beschränken. Zwar habe ich mir anfangs auch die Frage nach einer durchgreifenderen Aus- und Umarbeitung des ganzen Stoffes vorgelegt und sie reiflich erwogen, namentlich im Hinblick darauf, daß doch sowohl die einzelnen Anwendungen des Energieprinzips als auch die allgemeine energetische Denkweise in den letzten beiden Dezennien auf allen physikalischen Gebieten merkliche Fortschritte gemacht haben, und zwar ganz besonders in der Elektrodynamik, weniger in der Thermodynamik, wo die befruchtende Wirkung in viel stärkerem Grade vom zweiten Hauptsatz ausgegangen ist, der hier prinzipiell von der Behandlung ausgeschlossen wurde. Außerdem würde ich mit einer Neubearbeitung zugleich auch noch Gelegenheit gefunden haben, den in dem vorstehenden Urteil der Göttinger Philosophischen Fakultät ausgesprochenen Wünschen, wenn auch sehr verspätet, nach Möglichkeit gerecht zu werden. Aber ausschlaggebend bei dieser Überlegung waren für mich schließlich wieder ganz die nämlichen Bedenken, welchen ich schon am Schluß der Vorrede zur ersten Auflage Ausdruck gegeben habe, und die sich diesmal in ähnlicher Weise, nur noch in verstärktem Maße, geltend machten. Auch hätte die Ausführung dieses Planes notwendig dazu führen müssen, den Charakter des Buches, das doch nun einmal einem besonderen äußeren Anlaß seine Entstehung verdankt, zu ändern; und das schien mir nicht notwendig und nicht richtig zu sein. Daß ich

übrigens eine vollständig erschöpfende Darstellung aller Einzelanwendungen des Energieprinzips in diesem Buche niemals angestrebt habe, ist schon in dem Vorwort zur ersten Auflage ausdrücklich hervorgehoben worden.

Aus den angeführten Gründen habe ich mich auf eine sorgfältige Revision des Textes, sowie auf einige Änderungen in den Bezeichnungen beschränkt und nur durch einzelne besonders gekennzeichnete Anmerkungen dafür gesorgt, daß der Inhalt aller vorgetragenen Sätze auch mit den Ergebnissen der neuesten Forschungen im Einklang ist. Nur einen einzigen Satz und dessen Konsequenzen habe ich direkt im Text (S. 243) geändert: Das ist die früher von mir gemachte Annahme, daß die Peltier-Wärme an der Lötstelle zweier Metalle ein direktes Maß sei für die Potenzialdifferenz der Metalle, da ich dieselbe inzwischen (Wied. Ann. 36, p. 629, 1889) als undurchführbar erkannt habe.

So glaube ich mich im ganzen der Hoffnung hingeben zu dürfen, daß bei der Durchsicht des Buches auch dem modernsten Physiker wohl manche Lücke, aber keine Fehler auffallen werden.

Berlin, im Juni 1908. **Der Verfasser.**

Inhalt.

	Seite
Erster Abschnitt. Historische Entwicklung	1
Zweiter Abschnitt. Formulierung und Beweis des Prinzips .	103
Dritter Abschnitt. Verschiedene Arten der Energie	162
1. Mechanische Energie	166
2. Thermische und chemische Energie	213
3. Elektrische und magnetische Energie	226

Erster Abschnitt.

Historische Entwicklung.

Zwei Sätze sind es, welche dem gegenwärtigen Bau der exakten Naturwissenschaften zum Fundament dienen: das Prinzip der Erhaltung der Materie und das Prinzip der Erhaltung der Energie. Vor allen anderen noch so umfassenden Gesetzen der Physik behaupten sie den unbestreitbaren Vorrang; denn selbst die großen Newtonschen Axiome: die Gesetze der Trägheit, der Proportionalität von Kraft und Beschleunigung, und der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung, erstrecken sich doch nur auf einen speziellen Teil der Physik: die Mechanik, — für welche sie sich überdies, unter gewissen später zu erläuternden Voraussetzungen, sämtlich aus dem Prinzip der Erhaltung der Energie herleiten lassen. (S. 3. Abschnitt.) Nun ist es allerdings in der neueren Zeit immer mehr wahrscheinlich geworden, daß sich sämtliche Naturvorgänge auf Bewegungserscheinungen, also auf die Gesetze der Mechanik, zurückführen lassen, indes ist diese Überführung jedenfalls noch lange nicht in einem Maße geglückt, welches die unmittelbare Anwendung jener mechanischen Axiome auf einen beliebigen Vorgang in der Natur gestattet. Das Prinzip der Erhaltung der Energie dagegen dokumentiert seinen universellen Charakter eben dadurch, daß, wenn heutigen Tags eine ganz neue Naturerscheinung entdeckt werden sollte, aus ihm ohne weiteres ein Maß und ein Gesetz für das neue Phänomen zu gewinnen wäre, während es sonst kein anderes Axiom gibt, das mit derselben Zuversicht auf alle Vorgänge in der Natur

ausgedehnt werden könnte. Es hat sich dies in besonders deutlicher Weise gezeigt bei der Begründung der verschiedenen Elektrizitätstheorien, indem außer den experimentell erhärteten Tatsachen die Anerkennung des Prinzips der Erhaltung der Energie den einzigen gemeinsamen Ausgangspunkt für alle Theorien bildet, die Anspruch auf Zulässigkeit erheben.

Die am Eingang genannten beiden Prinzipien stehen sich gewissermaßen koordiniert gegenüber, indem das eine die Unzerstörbarkeit des Stoffes (besser: der durch das Gewicht gemessenen Masse), das andere die der Kraft (im entsprechenden Sinne dieses Wortes) ausdrückt, — eine Analogie, die sich noch mehr ins einzelne durchführen läßt und die zur Klärung der Auffassung entschieden viel beigetragen hat. So verwandt indes die beiden Sätze ihrem Inhalt nach erscheinen, eine so verschiedenartige Entwicklungsgeschichte haben sie durchgemacht. Während die Konstanz der Materie schon von den alten griechischen Naturphilosophen, besonders Demokrit, behauptet, von allen Atomisten festgehalten und schließlich von Black und Lavoisier zur unbeschränkten Anerkennung gebracht wurde durch den Satz, daß das Gewicht eines Systems von Körpern durch keinen chemischen Prozeß, auch nicht durch Verbrennung, geändert wird, muß man die Entdeckung des Prinzips der Erhaltung der Energie als eine Errungenschaft der neueren Zeit, und in seiner präzisen, allgemeinsten Form, der allerneuesten Zeit betrachten.

Die erste Spur der Existenz eines derartigen Prinzips machte sich in der schon vor Jahrhunderten, zum Teil durch mühsame und kostspielige Experimente, also auf induktivem Wege, gewonnenen Erfahrung geltend, daß es nicht möglich sei, ein perpetuum mobile[1]) zu bauen, d. h.

---

1) Im Gegensatz zu seiner wörtlichen Bedeutung wird der Ausdruck: Perpetuum mobile gewöhnlich nicht im Sinne der be-

eine periodisch wirkende Maschine zu konstruieren, durch die beliebig viel Arbeit oder lebendige Kraft gewonnen werden kann, ohne einen entsprechenden Aufwand irgend eines anderen Agens, sei es Verbrauch gewisser Materialien, sei es Verlust anderer Arbeit oder lebendiger Kraft, mit anderen Worten: ohne eine gewisse damit im Zusammenhang stehende anderweitige Veränderung, welche, — um eine Ausdrucksweise zu gebrauchen, die R. Clausius, allerdings bei einer ganz anderen Gelegenheit, anwendet, — die Eigentümlichkeit hat, daß sie nicht rückgängig werden kann, ohne ihrerseits, sei es mittelbar oder unmittelbar, einen Verbrauch von Arbeit oder lebendiger Kraft zu veranlassen. Diese Veränderung kann als Kompensation, als Äquivalent der geleisteten Arbeit betrachtet werden und man kann dann kurz sagen: Leistung von Arbeit oder Erzeugung von lebendiger Kraft kann nicht ohne irgend eine Kompensation erfolgen, oder noch kürzer: Es ist unmöglich, Arbeit aus Nichts zu gewinnen.

Inwieweit dieser Satz dazu dienen kann, das Prinzip der Erhaltung der Energie in seiner Allgemeinheit zu erweisen, werden wir im nächsten Abschnitt dieser Schrift zu zeigen haben, immerhin ersieht man schon hier, daß von der Erkenntnis dieses Erfahrungssatzes bis zur genauen mathematischen Formulierung des allgemeinen Prinzips noch ein weiter Weg zurückzulegen war. Dauerte es doch geraume Zeit, bis man zu der weiteren, hier höchst wesentlichen, Erkenntnis kam, daß jener Satz sich auch umkehren lasse, daß es also auch keine Vorrichtung gibt, durch welche sich Arbeit oder lebendige Kraft fortwährend verbrauchen ließe, ohne eine anderweitige als Kompensation zu betrachtende Veränderung. Denn die allgemeinere Anerkennung dieses letzteren Satzes ist, wie wir auch später noch deutlich

---

ständigen Bewegung, sondern in dem der beständigen Arbeitsleistung gebraucht.

sehen werden, ungleich jüngeren Datums — ein weiterer Beweis dafür, daß wir es hier mit einer reinen Erfahrungstatsache zu tun haben, da es den Menschen immer mehr darauf ankam, Arbeitskraft zu gewinnen als Arbeitskraft zu verlieren.

Die außerdem noch zu überwindenden Schwierigkeiten bezogen sich hauptsächlich auf die Beantwortung der Frage, in welchen Vorgängen denn die oben angegebene Kompensation zu suchen sei, in welchem Zusammenhang die Größe derselben mit der geleisteten bez. verbrauchten Arbeit stehe, was man also als Maß der Kompensation, als Äquivalenzwert der geleisteten Arbeit zu betrachten habe. Wir werden in der Folge öfters Gelegenheit haben zu bemerken, daß die meisten und wichtigsten Meinungsverschiedenheiten und Mißverständnisse, die im Laufe der Zeiten bei der Anwendung unseres Prinzips zutage traten, sich nicht sowohl auf die Anerkennung oder Leugnung des Satzes an sich bezogen, — seine Gültigkeit wurde in der Regel allgemein zugegeben — sondern vielmehr auf die Messung der Kompensation, auf den Äquivalenzwert der geleisteten Arbeit. Es läßt sich dies bis in die neueste Zeit hinein verfolgen.

Trotz seiner unvollkommenen Form zeigte der primitive Satz, daß Arbeit ebensowenig wie Materie aus nichts entstehen kann, doch schon in früheren Zeiten eine gewisse Fruchtbarkeit, und während er sich tiefer und tiefer dem menschlichen Denken einprägte, wurde dadurch die beste Vorbereitung für seine nachmalige Präzisierung durch das allgemeine Prinzip gewonnen. Auch zu wissenschaftlichen Schlußfolgerungen, in der Mechanik, finden wir den Satz von der Unmöglichkeit des perpetuum mobile wiederholt verwendet. Berühmt ist der Beweis, den S. Stevin[1]) in seinen

1) Vgl. E. Mach: Die Mechanik in ihrer Entwicklung historisch-kritisch dargestellt, Leipzig 1883, p. 24. E. Dühring: Kritische Geschichte der allgemeinen Prinzipien der Mechanik, Berlin 1873, p. 61.

1605 in Leiden erschienenen Hypomnemata mathematica[1]) für die Gleichgewichtssätze an der schiefen Ebene gibt und als Grundlage seines ganzen Systems der Statik verwertet. Denkt man sich über die Spitze und die anstoßenden Schenkel eines vertikal aufgestellten Dreiecks mit horizontaler Grundlinie eine schwere Kette gelegt, deren auf beiden Seiten der Grundlinie herabhängende Enden zusammen verbunden sind, so ist nach Stevin klar, daß die Kette sich im Gleichgewicht befindet. Denn wäre dies nicht der Fall, so würde sie nach einer Seite hin zu gleiten anfangen, und diese Bewegung würde ohne Ende fortdauern, da die Konfiguration des Systems stets dieselbe bleibt; man könnte also diese Vorrichtung benutzen, um ohne eine entsprechende Kompensation bis ins Unendliche Arbeit zu gewinnen. Aus der Unmöglichkeit eines solchen Apparates schließt Stevin das Bestehen des Gleichgewichts, das auch dann ungestört bleibt, wenn man die beiden von den Endpunkten der Grundlinie symmetrisch herabhängenden Kettenenden gleichzeitig abschneidet, so daß schließlich der auf den ersten Anblick durchaus nicht in die Augen springende Satz resultiert, daß eine über ein vertikales ungleichschenkliges Dreieck gelegte ungeschlossene Kette sich dann im Gleichgewicht befindet, wenn ihre Endpunkte in derselben horizontalen Ebene liegen.

Auch G. Galilei scheint bei dem Beweis des Satzes, daß die von einem schweren Körper durch den Fall auf einer beliebigen Bahn erlangte Geschwindigkeit nur von dem vertikalen Abstand der Anfangs- und der Endlage abhängt, von einer ähnlichen Voraussetzung wie Stevin ausgegangen zu sein, durch die Annahme, daß, wenn dieser Satz unrichtig wäre, sofort ein Mittel angegeben werden könnte, um einen Körper nur durch die Wirkung seiner eigenen Schwere auf

1) S. Stevinus: Hypomnemata mathematica, französisch von Girard. Leiden 1634, p. 448.

eine größere Höhe zu bringen, indem man ihn auf einer gewissen Bahn fallen und auf einer anderen geeigneten wieder aufsteigen ließe; dadurch wäre dann natürlich das perpetuum mobile gegeben.

In engem Zusammenhang hiermit steht die ebenfalls schon von Galilei gewonnene Erkenntnis, daß, wenn durch ein herabsinkendes Gewicht eine größere Last langsam gehoben wird, die Produkte der Gewichte in die gleichzeitig zurückgelegten Wege gleich sind — ein Satz, der später, namentlich durch Joh. Bernoulli[1]) (1717) zum Prinzip der virtuellen Verschiebungen (Geschwindigkeiten) erweitert wurde. — Gerade der Satz, daß ein Körper nicht durch seine eigene Schwere emporsteigen kann, oder allgemeiner gesprochen: daß ein System schwerer Punkte oder Körper nicht durch die treibende Kraft seiner eigenen Schwere seinen Schwerpunkt höher rücken kann, ist für die Entwickelung der Mechanik durch C. Huygens von der größten Bedeutung geworden. Derselbe stützte bekanntlich[2]) seine Theorie des physikalischen Pendels auf den Satz, daß ein System fest miteinander verbundener mathematischer Pendel, als welches ja jedes physikalische Pendel angesehen werden kann, bei der aufsteigenden Bewegung seinen Schwerpunkt vermittelst der anfänglichen Geschwindigkeit nicht höher rücken kann, als wenn die Pendel alle mit derselben Anfangswinkelgeschwindigkeit unabhängig von einander schwingen würden. Einen Beweis dieses Satzes zu liefern scheint Huygens nicht für nötig befunden zu haben, es muß also die instinktive Überzeugung von seiner Richtigkeit, d. h. die Anerkennung der Unmöglichkeit des perpetuum mobile, bei ihm schon vorhanden gewesen sein. Gibt man den Satz als richtig zu, so folgt daraus unmittelbar die Lehre vom Schwingungsmittelpunkt.

---

1) Joh. Bernoulli: Opera, 1742, T. III.
2) C. Huygens: Horologium oscillatorium, Paris, 1673.

In dem Satz von Huygens liegt schon das Prinzip der lebendigen Kraft in seiner Anwendung auf die Schwere enthalten; denn man wußte ja schon durch Galilei, daß die Höhe, bis zu welcher ein emporgeworfener Körper aufsteigen kann, proportional ist dem Quadrat seiner Geschwindigkeit, und konnte daher, nachdem Leibniz[1]) im Jahre 1695 für die Größe mv^2 den Namen vis viva eingeführt hatte (der Faktor $^1/_2$ findet sich wohl zuerst bei Coriolis[2])), den Satz aussprechen, daß die lebendige Kraft eines Körpers, der sich unter dem Einfluß der Schwere bewegt, einerlei ob ganz frei oder durch feste Verbindungen (Drehungsachsen u. dgl.) beschränkt, lediglich abhängt von der Höhe des Schwerpunkts.

Leider ist durch die Leibnizsche Bezeichnungsweise, die sich ja bis auf den heutigen Tag erhalten hat, infolge einer Verwechslung mit dem Newtonschen Kraftbegriff, eine unheilvolle Verwirrung der Ideen und eine zahllose Schar von Mißverständnissen heraufbeschworen worden, die dadurch nicht vermieden werden konnte, daß Leibniz für den Druck eines ruhenden schweren Körpers, also für die Newtonsche Kraft, die unterscheidende Bezeichnung vis mortua angewendet wissen wollte; die beiden Arten von Kräften: lebendige und tote Kraft, waren nun einmal von ganz verschiedenen Dimensionen. Wir werden auf diesen Punkt auch später noch, bei der Besprechung von R. Mayers Arbeiten, zurückkommen.

Die Bedeutung des Begriffes der lebendigen Kraft für die Gesetze des Stoßes wurden schon früher (1669) von Wren und Huygens erkannt, indem dieselben in ihren Theorien des elastischen Stoßes übereinstimmend zu dem Resultat kamen, daß beim Stoß zweier elastischer Körper keine lebendige Kraft verloren geht; dagegen ergibt sich aus den Gesetzen, die gleichzeitig Wallis in seinen Untersuchungen über

1) G. W. Leibniz: Acta Erud. Lips. 1695.
2) Coriolis: Calcul de l'effet de machines, Paris 1829.

den unelastischen Stoß aufdeckte, ein Verlust von lebendiger Kraft bei diesem Stoß.

Am meisten gewann jedoch der Begriff der lebendigen Kraft an Interesse durch die bekannte Kontroverse zwischen Descartes bez. Papin und Leibniz, die noch lange nach deren Tode von ihren beiderseitigen Anhängern mit steigender Heftigkeit weitergeführt wurde, über das wahre Maß der Kraft eines in Bewegung befindlichen Körpers. Leibniz stützte sich dabei auf die Erfahrung, daß zur Hebung eines bestimmten Gewichtes um 4 Fuß die nämliche Kraft (Arbeit) erforderlich ist, wie zur Hebung des 4fachen Gewichtes um 1 Fuß, da man ja in beiden Fällen die ganze Leistung zerlegen kann in 4 einzelne Leistungen, jede bestehend in der Hebung des einfachen Gewichtes um 1 Fuß.

Denkt man sich nun die Hebung der Gewichte dadurch bewerkstelligt, daß man ihnen eine nach oben gerichtete Geschwindigkeit erteilt, die gerade dazu hinreicht, sie auf die bestimmte Höhe zu bringen, so muß man nach den Galileischen Sätzen dem einfachen Gewicht, damit es die vierfache Höhe erreicht, nicht die vierfache, sondern die doppelte Geschwindigkeit erteilen von der, die man dem vierfachen Gewicht zu geben hat, damit es die einfache Höhe erreicht. Da aber zu gleichen Wirkungen gleiche Ursachen gehören, so, schließt Leibniz, ist auch die dem einfachen Gewicht mit der doppelten Geschwindigkeit innewohnende Kraft gleich der dem vierfachen Gewicht mit der einfachen Geschwindigkeit innewohnenden Kraft, woraus allgemein der Ausdruck mv^2 als Kräftemaß folgt.

Anders Descartes und seine Schüler: Eine doppelte Kraft erzeugt an dem nämlichen Körper in der nämlichen Zeit eine doppelte Geschwindigkeit, folglich bildet die Quantität der Bewegung: mv das wahre Kraftmaß.[1])

---

1) M. Zwerger: Die lebendige Kraft und ihr Maß. Ein Beitrag zur Geschichte der Physik. München 1885.

Nach unserer heutigen exakteren physikalischen Auffassungsweise, die genau zwischen Kraft und Arbeit unterscheidet, müssen wir natürlich diesen ganzen Streit zunächst als reinen Wortstreit erklären; denn von einer sachlichen Kontroverse kann doch erst dann gesprochen werden, wenn man sich über die, von vornherein vollständig willkürliche, Definition des Begriffes geeinigt hat, von dem die Rede ist. So lange man also mit dem Worte Kraft keine klare Vorstellung verband, war ein Streit über das Maß der Kraft vollständig gegenstandslos. Indessen ist nicht zu verkennen, daß dem besprochenen Streite dennoch ein wesentlich tieferer Inhalt zugrunde lag; denn die Parteien waren sich, wenn dies auch nur gelegentlich und undeutlich ausgesprochen wurde, in der Tat bis zu einem gewissen Grade über das einig, was sie unter „Kraft" verstehen wollten. Descartes sowohl als Leibniz hatten sicherlich eine, wenn auch nicht ganz klar präzisierte Vorstellung von der Existenz eines Prinzips, welches die Unveränderlichkeit und Unzerstörbarkeit desjenigen ausspricht, aus dem alle Bewegung und Wirkung in der Welt hervorgeht. Während Descartes die Gültigkeit dieses Prinzips durch theologische Betrachtungen unterstützte, die auf die Ewigkeit des Schöpfers basiert sind, geht Leibniz aus von dem Gesetz der Ursache und Wirkung. Eine Ursache kann nur diejenige Wirkung hervorbringen, die ihr gerade entspricht, keine größere und keine kleinere. Es kann also in der fortlaufenden Kette von Ursachen und Wirkungen, aus denen die Erscheinungen der Welt gebildet sind, weder ein Wachstum noch eine Abnahme stattfinden: es ist etwas da, was konstant bleibt. Nennen wir dieses Etwas Kraft, so haben wir eine, wenn auch nur sehr unvollkommene Vorstellung von dem, was in dem Begriff der Kraft den gemeinsamen Ausgangspunkt für die beiden verschiedenartigen Auffassungen bilden mochte. Denn nun war sehr wohl eine Meinungsverschiedenheit darüber möglich, ob die Descartessche Quantität der Bewegung, oder ob die Leib-

nizsche lebendige Kraft das wahre Maß jenes Begriffes ist. Wäre der Streit in dieser etwas präziseren Form geführt worden, so hätte Leibniz recht behalten müssen. — Wir haben hier schon einen der oben erwähnten Fälle vor uns, wo es sich weniger um die Anerkennung der Unveränderlichkeit der Kraft handelt, als um den Äquivalenzwert dieser von beiden Parteien als unveränderlich anerkannten Größe, nämlich um das Maß der Kompensation, welche in der Geschwindigkeit eines Körpers eintritt, wenn seine Bewegung dazu benutzt wird, um eine bestimmte Wirkung hervorzubringen. Derselbe Gedanke wird uns noch öfters wiederkehren.

Als gegen Ende des 17. Jahrhunderts die Mechanik, die damals noch fast den einzigen Zweig der Physik ausmachte, durch Isaac Newton zu der Vollendung geführt wurde, die heute noch im wesentlichen unübertroffen dasteht, wurde auch der Begriff der Kraft, wie es scheint, für alle Zeiten, endgültig festgestellt, und zwar in einem Sinne, der sich an das von Descartes gebrauchte Kraftmaß anschließt. Newton (1687) faßte die Kraft unmittelbar als einen Druck auf, wie er durch das Muskelgefühl zur Empfindung gebracht wird, und maß daher die Größe einer Kraft durch die Geschwindigkeit, die dieser Druck an der Masseneinheit in der Zeiteinheit hervorbringt, woraus sich die Dimension der Kraft als Produkt aus Masse und Beschleunigung ergibt. Diese Größe hat natürlich mit dem Prinzip der Erhaltung der „Kraft" nichts zu tun, und es mag dies auch ein Grund gewesen sein, weshalb nun für eine Zeitlang dies Prinzip wieder etwas an Interesse verlor. Der Leibnizsche Kraftbegriff erscheint jetzt als die Leistung oder Arbeit der Newtonschen Kraft; letztere bezeichnet bloß eine notwendige, aber noch nicht hinreichende Bedingung, eine Leistung zu vollbringen.

Newton selber scheint sich mit dem Begriffe der Leistung oder Arbeit einer Kraft niemals besonders beschäftigt zu

haben, wenn sich in seinen Werken auch einige Stellen auffinden lassen, wo er diesem Begriffe näher tritt. Dahin gehört die oft zitierte Definition der actio agentis[1]) (Produkt einer Kraft in die entsprechende Geschwindigkeitskomponente ihres Angriffspunktes), welche Größe die von der Kraft in der Zeiteinheit geleistete Arbeit angibt. Indes wird von dieser Definition kein weiterer Gebrauch gemacht; überhaupt scheinen mir die Versuche, aus dieser Stelle, die dem Kommentar zu dem Axiom von der Gleichheit der Aktion und Reaktion entnommen ist, das Prinzip der Erhaltung der Energie abzuleiten, keinen Erfolg zu versprechen, schon weil der Inhalt der genannten beiden Sätze ganz verschiedenen Gebieten angehört. Jedenfalls nahm Newton die Tatsache, daß durch Reibung oder durch unvollkommene Elastizität Bewegung verloren geht, ohne irgend ein Bedenken oder sonstige Bemerkung hin.[2])

Die weitere Ausbildung des Begriffes der Arbeit und der lebendigen Kraft verdanken wir vielmehr den Physikern von Basel, vor allem Joh. Bernoulli, der sich ziemlich eng an die Leibnizsche Auffassung anschließt. Derselbe spricht zu wiederholten Malen von der conservatio virium vivarum und betont dabei, daß, wenn lebendige Kraft verschwindet, die Fähigkeit, Arbeit zu leisten (facultas agendi[3])) doch nicht verloren geht, sondern nur in eine andere Form, z. B. Kompression, umgewandelt wird.[4]) Nach L. Euler ist die lebendige Kraft eines Punktes, der von einem festen Zentrum nach einer Potenz der Entfernung angezogen oder abgestoßen wird, immer dieselbe, so oft er wieder an die nämliche Stelle

---

1) I. Newton, Philosophiae naturalis principia mathematica. Opera, ed. S. Horsley. Vol. II. Londini 1779, p. 28 s.

2) I. Newton: Opera, ed. S. Horsley. Vol. IV. Londini 1782, p. 258.

3) Joh. Bernoulli: Opera, 1742. T. III, p. 239.

4) Joh. Bernoulli: Opera, Lausannae et Genevae 1742, T. III, p. 243.

im Raume kommt, während im übrigen ihre Zunahme durch die Arbeit (effort) der Kraft gemessen wird. (Der Ausdruck travail stammt von Poncelet[1]).) Daniel Bernoulli erweiterte diesen Satz auf mehrere bewegliche Punkte und lehrte außerdem die hohe Fruchtbarkeit der von seinem Vater entwickelten Prinzipien für die Bewegungsgesetze der Flüssigkeiten kennen.[2])

Auch in der Technik machte sich das Bedürfnis nach näherem Studium des Arbeitsbegriffes geltend und führte durch J. Watt zur Einführung der Bezeichnung „Pferdekraft" (Arbeit eines Pferdes pro Sekunde).

Thomas Young war es, der für die lebendige Kraft eines bewegten Körpers zuerst den Namen Energie gebrauchte und so den Grund legte zu der heutigen Bedeutung dieses Ausdrucks. (Das Wort ἐνέργεια in physikalischer Bedeutung findet sich schon bei Aristoteles; auch andere Physiker: Galilei, Joh. Bernoulli[3]) wenden es gelegentlich

---

1) Poncelet: Cours de mécanique appliquée aux machines. Metz 1826.

2) Dan. Bernoulli: Hydrodynamica, 1738. Außerdem vgl. Remarques sur le principe de la conservation des forces vives pris dans un sens général. Histoire de l'Académie de Berlin, 1748, p. 356.

3) Herr Hagenbach hebt in einem Vortrag über die Verdienste von Joh. und Dan. Bernoulli um den Satz der Erhaltung der Energie (Verh. d. naturf. Ges. zu Basel, T. VII, 1884) wiederholt (p. 24 und p. 28) hervor, daß bereits Joh. Bernoulli dem Arbeitsbegriff den Namen „Energie" gegeben habe. Ich konnte indes trotz sorgfältiger Durchsicht aller Bernoullischen Schriften (Opera, 1742) diese Bemerkung nirgends bestätigt finden; das einzige Mal, wo mir das Wort énergie auffiel (T. III, p. 45), wird es in einem ganz anderen Sinne gebraucht. [Anm. 1908. Auf vorstehende Bemerkung hat Hr. Hagenbach-Bischoff (Verh. d. naturforschenden Ges. zu Basel, Teil VIII, p. 833) erwidert, daß sich im zweiten Band der i. J. 1725 erschienenen Nouvelle mécanique von Varignon S. 174 die Erwähnung eines (jetzt wohl nicht mehr vorhandenen) Briefes von Joh. Bernoulli an den Verf. findet, in welchem das Wort „Energie" im Sinne einer Arbeit definiert wird.]

an, ohne jedoch einen speziellen Sinn damit zu verbinden.) Bei seiner Untersuchung der Gesetze des Stoßes fand Young,[1]) ebenso wie vor ihm schon Wren, Wallis und Huygens, daß beim zentralen Stoß zweier Körper die Bewegungsquantität, also die Bewegungsgröße des Schwerpunktes, unter allen Umständen erhalten bleibt, und bezeichnet, ganz im Descartesschen Sinn, unter Verwerfung der gegenteiligen, von Leibniz und Smeaton geäußerten Ansichten, diese Größe als das wahre Maß der einem bewegten Körper innewohnenden Kraft. Indes hält er doch die von anderen als lebendige Kraft bezeichnete Größe für wichtig genug, ihr einen besonderen Namen, den der Energie des bewegten Körpers, beizulegen, besonders, da es Fälle gibt, wo die Wirkung des bewegten Körpers offenbar nach dem Quadrate seiner Geschwindigkeit bemessen wird. So bohrt eine Kugel mit doppelter Geschwindigkeit ein viermal so tiefes Loch in ein Stück weichen Lehm oder Talg, als eine mit einfacher Geschwindigkeit, und um die Geschwindigkeit eines Körpers zu verdoppeln, muß man ihn von der vierfachen Höhe fallen lassen. Auch daß vollkommen elastische Bälle beim Stoß ihre Energie behalten, hebt Young hervor. Nichtsdestoweniger steht er dem allgemeinen Prinzip der Erhaltung der Energie noch fern; denn die hierzu notwendige Erweiterung des Begriffes der Energie war einer späteren Zeit vorbehalten.

Überblicken wir in Kürze die bis zum Ausgang des achtzehnten und Beginn des neunzehnten Jahrhunderts auf dem von uns geschilderten Gebiete vorliegenden Forschungen, so ist als die gereifte Frucht derselben die Erkenntnis des Gesetzes der Erhaltung der lebendigen Kräfte zu bezeichnen. In einem System von materiellen Punkten, die Zentralkräften unterworfen sind, ist die lebendige Kraft nur abhängig von der augenblicklichen Konfiguration des Systems, nämlich von

---

1) Th. Young: A course of lectures on natural philosophy. London 1807. Vol. I. Lect. VIII, p. 75. On collision.

dem Werte, welchen die (von R. Hamilton so benannte) Kräftefunktion bei dieser Konfiguration hat. Die Änderung der Kräftefunktion mißt also die von den Kräften geleistete Arbeit, einerlei, auf welchem Wege die Veränderung stattfindet; bei der Rückkehr in dieselbe Konfiguration ist auch die lebendige Kraft wieder dieselbe. Durch diesen Satz ist die Konstruktion eines perpetuum mobile durch rein mechanische Wirkungen ausgeschlossen. Allerdings mußte die Gültigkeit desselben beschränkt werden auf eine bestimmte Art von Kräften, die gegenwärtig als „konservative" charakterisiert zu werden pflegen; auf Reibung, unelastischen Stoß usw. findet er keine Anwendung, hier tritt vielmehr regelmäßig Verlust von lebendiger Kraft ein.

Welch großartiger Verallgemeinerung das Gesetz der lebendigen Kräfte fähig ist, davon mochten damals nur die Wenigsten eine Ahnung haben. Dennoch ist es Tatsache, daß schon am Ende des achtzehnten Jahrhunderts die Unmöglichkeit der Konstruktion des perpetuum mobile, auch nach anderen als mechanischen Methoden, so ziemlich allgemein eingesehen wurde, wofür den besten Beweis der Umstand liefert, daß die französische Akademie[1]) im Jahre 1775 ein für allemal erklärte, keine angeblichen Lösungen dieses Problems mehr anzunehmen. Den meisten Zeitgenossen mochte diese Unmöglichkeit als eine bedauerliche Tatsache, als eine Art notwendiges Übel erscheinen, ohne daß jemand daran gedacht hätte, daraus für die Wissenschaft Kapital zu schlagen, trotz der Erfolge, die Stevin und Huygens schon in dieser Richtung erzielt hatten.

Da tat Sadi Carnot[2]) im Jahre 1824 den ersten entscheidenden Schritt, der die Anwendbarkeit jenes Satzes auch

1) Hist. de l'Acad. Roy. des Sciences. 1775, p. 61 u. 65. H. v. Helmholtz: Vorträge und Reden. Braunschweig 1884. I. p. 64.

2) S. Carnot: Réflexions sur la puissance motrice du feu, et sur les machines propres à développer cette puissance. Paris 1824. Wieder abgedruckt Ann. de l'école norm. (2) I. p. 393, 1872.

auf nichtmechanische Erscheinungen zeigte. Da die Erfindung der Dampfmaschine den Mangel einer befriedigenden Theorie der mechanischen Wirkungen der Wärme aufs empfindlichste fühlbar gemacht hatte, so unternahm es Carnot, ausgehend von dem Gedanken der Unmöglichkeit des perpetuum mobile, eine neue Theorie der Wärme zu begründen, die später in demselben Sinne, aber mit noch etwas eleganteren, leichtfaßlicheren Darstellungsmitteln, von Clapeyron[1]) weiter ausgebildet wurde. Hierbei zeigte sich nun aber wieder, daß die Anwendung jenes Prinzips als wichtigste Bedingung die richtige Bestimmung des Äquivalenzwertes der geleisteten Arbeit verlangt. Es handelte sich um die Frage: Wenn durch Wärme Arbeit erzeugt wird, welcher Vorgang muß dann als Kompensation für die geleistete Arbeit angesehen werden und wie hat man dieselbe zu messen? Da zur Zeit Carnots diejenige Theorie der Wärme in vollem Ansehen stand, welche die Wärme als einen unzerstörbaren Stoff betrachtet, dessen Vorhandensein in größerer oder geringerer Menge einen Körper mehr oder weniger warm erscheinen läßt, so mußte er auf den Gedanken kommen, daß die Wärmematerie auf ähnliche Weise lebendige Kraft produziert wie die Schwere der ponderablen Materie. Letztere hat das Bestreben, aus höheren in tiefere Lagen zu fallen; die dabei erzeugte lebendige Kraft wird gemessen durch das Produkt der Schwerkraft in die durchfallene Höhe, und dies Produkt ist daher das Äquivalent der erzeugten lebendigen Kraft. Daraus schloß Carnot: Das Wärmefluidum hat das Bestreben, aus höheren in tiefere Temperaturen überzugehen, wie man aus den Gesetzen der Wärmeleitung erkennt. Man kann aber dies Bestreben nutzbar machen und daraus lebendige Kraft erzeugen, die dann gemessen wird durch das

1) Clapeyron: Mémoire sur la puissance motrice du feu. Journ. de l'école polytechnique, T. XIV, p. 170, 1834. Pogg. Ann. 59, p. 446 und 566, 1843.

Produkt der übergegangenen Wärmemenge in das durchlaufene Temperaturintervall. Daher suchte Carnot die Kompensation für die Erzeugung von Arbeit in dem Übergang von Wärme aus höherer in tiefere Temperatur und betrachtete als das Maß derselben, also als das Äquivalent der Arbeit das Produkt einer Wärmemenge in eine Temperaturdifferenz. Nach einer Berechnung von Clapeyron ist der Übergang einer Kalorie von 1^0 Cels. auf 0^0 Cels. gerade imstande, 1,41 Kilogramm 1 Meter hoch zu heben, man müßte danach die Zahl 1,41 das Carnotsche Wärmeäquivalent nennen. (Diese Zahl ist nichts anderes als das Joulesche mechanische Wärmeäquivalent dividiert durch die absolute Temperatur in Cels.-Graden des schmelzenden Eises.) Wie man sieht, gleichen diese Betrachtungen der Form nach ganz denen, die später von Mayer und Joule angestellt wurden, Carnots Fehler liegt bloß darin, daß er eine falsche Vorstellung von der Art des Vorganges mitbrachte, in welchem die Kompensation für die erzeugte Arbeit zu suchen ist, eine Vorstellung, die aber durch die damals herrschende Theorie der Wärme wesentlich bedingt wurde.

In der Mechanik läßt sich Arbeit auf zweierlei Weise erzeugen: durch Leistung anderer Arbeit oder durch Aufwand von lebendiger Kraft. Statt nun das Analogon der Arbeitserzeugung durch Wärme in dem zweiten Vorgang zu suchen, also die Kompensation in dem Verschwinden von Wärme zu erblicken und die geleistete Arbeit durch die Quantität der vernichteten Wärme zu messen, verglich Carnot die Wirksamkeit der Wärme mit der Arbeitsleistung durch die Schwere der ponderablen Materie, die an sich unzerstörbar ist und nur durch Veränderungen ihrer Lage imstande ist Wirkungen hervorzubringen. Für Carnot war also die Wärme nichts anderes als wie für Newton die Kraft: eine notwendige, aber noch nicht hinreichende Bedingung, Wirkungen hervorzubringen.

Man sieht aber auch weiter, daß, da sich die Carnot-

Clapeyronsche Theorie wesentlich auf das Prinzip des ausgeschlossenen perpetuum mobile stützt, auf ihr sehr wohl auch ein Prinzip der Erhaltung der Energie aufgebaut werden könnte, nur hat man dann als Energie der Wärme nicht eine einfache Wärmemenge, sondern das Produkt einer Wärmemenge in eine Temperatur anzusehen, und es ist daher unrichtig, anzunehmen, daß das Prinzip der Erhaltung der Energie an sich einen Widerspruch gegen die materielle Wärmetheorie involviere, im Gegenteil: Carnot steht gerade voll und ganz auf dem Boden dieses Prinzips. In Übereinstimmung mit dieser Anschauung führt Helmholtz[1]) in seiner „Erhaltung der Kraft" beide Theorien, die materielle und die mechanische, als von vornherein nebeneinander gleichberechtigt an, und verwirft die erstere nur aus dem Grunde, weil durch Experimente nachgewiesen ist, daß die Quantität der Wärme sich ändern kann.

Für die Beurteilung der Leistungen Carnots ist übrigens die Tatsache sehr wichtig und hier um so bemerkenswerter, weil sie in weiteren Kreisen gänzlich unbekannt geblieben sein dürfte, daß Carnot, wie sich aus einem handschriftlich nachgelassenen Aufsatz ergibt, der von seinem überlebenden Bruder[2]) der französischen Akademie zugeeignet worden ist, sich längere Zeit nach Herausgabe seines Hauptwerkes veranlaßt sah, die von ihm bis dahin vertretene materielle Wärmetheorie aufzugeben und die Wärme für Bewegung zu erklären. Soviel aus dem Inhalt des genannten Aufsatzes in den Comptes rendus mitgeteilt ist, läßt erkennen, daß Carnot sich der Konsequenzen, die aus dem Prinzip der Erhaltung der Energie für die neue Anschauung fließen, ebenso klar bewußt war, wie bald nach ihm J. R. Mayer und J. P. Joule. Es heißt daselbst u. a.: Überall, wo Arbeit verschwindet (où il y a destruction de puissance

1) H. v. Helmholtz: Wiss. Abh. I. Leipzig 1882, p. 33.
2) H. Carnot: Lettre, Compt. Rend. 87, p. 967, 1878.

motrice), findet Wärmeerzeugung (production de chaleur) statt, und umgekehrt, in proportionalen Mengen. Dabei ist nach einer nicht näher angegebenen Berechnung 1 Arbeits-Einheit (die Hebung eines Kubikmeters Wasser um 1 Meter) äquivalent einer Erwärmung um 2,70 Kalorien, — eine Zahl, die das mechanische Wärmeäquivalent zu 370 kgrm. (vgl. die Mayersche Zahl) ergibt. Wenn man bedenkt, daß Carnot diese Berechnung mindestens zehn Jahre früher als Mayer anstellte (er starb im Jahre 1832), so fällt ihm unbedingt das Verdienst der erstmaligen Auswertung des mechanischen Wärmeäquivalents zu. Für die Wissenschaft ist allerdings, mangels einer rechtzeitigen Veröffentlichung, diese Entdeckung leider nicht mehr nutzbar geworden.

Die Carnot-Clapeyronsche Theorie der Wärmewirkungen fand weitere Ausbildung besonders in England; noch im Jahre 1848 gründete W. Thomson[1]) auf sie seine absolute Temperaturskala; denn es ist klar, daß, wenn das Produkt aus Wärme und Temperatur äquivalent ist einer Arbeit, aus dieser Gleichung eine Definition der Temperatur abgeleitet werden kann, wenn das Maß der Wärme gegeben ist. Ein bestimmtes Temperaturintervall ist dann vollständig definiert durch den Betrag der Arbeit, welche eine durch dieses Intervall „herabsinkende" Kalorie zu leisten imstande ist.

Eine wesentliche Schwäche dieser Theorie liegt aber schon in der Annahme, daß Arbeit, wiewohl sie nicht aus nichts entstehen kann, so doch in nichts vergehen kann. Clapeyron[2]) spricht dies rundweg aus, er sagt: Bei direkter Leitung von Wärme aus einem wärmeren in einen kälteren Körper geht Wirkungsgröße (Fähigkeit, Arbeit zu leisten)

---

1) W. Thomson: On a absolute thermometric scale founded on Carnots theory of the motive power of heat, and calculated from Regnaults observations. Phil. Mag. (3) 33, p. 313, 1848.

2) Clapeyron: Mémoire sur la puissance motrice du feu. Journ. de l'école polytechnique, T. XIV, p. 170, 1834. Pogg. Ann. 59, p. 446 und 566, 1843.

verloren. Man kann also nach ihm sehr wohl Arbeit verlieren, ohne daß dafür irgend ein als Kompensation dienendes Äquivalent gewonnen wird. Ebenso dachte er von der Reibung: sie vernichtet lebendige Kraft, ohne ein Äquivalent dafür zu liefern. Thomson dagegen erblickte in diesem Punkt eine bedeutende Schwierigkeit der Carnotschen Theorie, indem er offenbar schon damals von der Überzeugung durchdrungen war, daß der Satz vom perpetuum mobile auch umkehrbar ist. Er äußert sich folgendermaßen[1]): Wenn durch direkte Leitung von Wärme aus höherer zu tieferer Temperatur Wärmewirkung aufgewendet wird, was wird dann aus dem mechanischen Effekt, der durch diesen Übergang erzielt werden könnte? In der Natur kann nichts verloren gehen, die Energie ist unzerstörbar, es frägt sich also, welch eine Wirkung es denn ist, die nun an die Stelle der übergeleiteten Wärme tritt. Er hält diese Frage für verfänglich (perplexing) und meint, eine vollkommene Wärmetheorie müsse hierauf eine befriedigende Antwort erteilen. Nichtsdestoweniger hält er in der erwähnten Abhandlung noch an Carnots Theorie fest, indem er die Schwierigkeiten, die beim Aufgeben derselben entstehen, für ungleich höher taxiert.

Und doch sind diese Schwierigkeiten so überraschend schnell überwunden worden. Die Erfahrungen, die den Satz von der Unzerstörbarkeit der Wärme mit zwingender Gewalt aufzugeben nötigten, häuften sich immer mehr, bis endlich durch die Folgen der glänzenden Entdeckung des mechanischen Wärmeäquivalents der materiellen Wärmetheorie ein schnelles Ende bereitet wurde. Betrachtet man Wärme als Bewegung, so leuchtet von selbst ein, daß die Kompensation der durch Wärme geleisteten Arbeit in dem Verschwinden von Wärme zu suchen ist, indem dann als Äquivalent der geleisteten

1) W. Thomson: An account of Carnots theory of the motive power of heat. Transact. of the Roy. Soc. of Edinburgh. vol. XVI, p. 541, 1849.

Arbeit die verlorene lebendige Kraft der Wärmebewegung angesehen werden muß; und die Bestätigung der Konsequenzen dieses Satzes durch die Erfahrung ist es, welche der mechanischen Wärmetheorie zum entscheidenden Übergewicht verholfen hat. Schon lange hatte die Schwierigkeit, die durch Reibung entstehende Wärme zu erklären, einzelne Physiker zu der Ansicht geführt, daß die Wärme der Quantität nach nicht unveränderlich, also kein Stoff sein könne. Nach der materiellen Theorie müßte die Reibungswärme entweder von außen zugeleitet sein oder es müßten die geriebenen Körper ihre Wärmekapazität derart verkleinert haben, daß die nämliche Wärme eine viel höhere Temperatur in ihnen hervorruft. Daß beide Annahmen unstichhaltig sind, zeigte Rumford[1]) auf schlagende Weise, indem er einen stumpfen Bohrer, der gegen den Boden eines Kanonenlaufs gepreßt war, durch Pferdekraft in Rotation versetzte und durch die Reibungswärme eine beträchtliche Quantität Wasser sogar zum Sieden brachte; die Wärmekapazität des Metalls zeigte sich dabei gar nicht verändert. Da nun die so produzierte Wärme durch Fortsetzung des Verfahrens ganz ins Beliebige gesteigert werden konnte, so brachte Rumford dieselbe in Zusammenhang mit der aufgewendeten Kraft, ohne sich jedoch auf eine numerische Vergleichung der geleisteten Arbeit und der erzeugten Wärme einzulassen. Dasselbe bewies fast gleichzeitig Davy[2]) durch Reibung zweier Metallstücke vermittelst eines selbsttätigen Uhrwerks unter der Luftpumpe, noch schlagender durch Reibung zweier von äußeren Einflüssen gänzlich isolierter Eisstücke, welche bis zum Schmelzen gebracht wurden. Hierbei ist der Umstand

1) Rumford: An inquiry concerning the source of the heat which is excited by friction. Trans. of the Roy. Soc. London 1798. Jan. 25.

2) H. Davy: An essay on heat, light and the combinations of light, in Beddoes Contributions to physical and medical knowledge, Bristol 1799. Works vol. II, London 1836, p. 11.

noch besonders gravierend, daß ja die Wärmekapazität des Wassers nahezu das Doppelte derjenigen des Eises ist. Seitdem sind noch viele andere Experimente angeführt worden, welche aufs deutlichste darauf hinweisen, daß Wärme erzeugt werden kann, so namentlich durch Absorption von Licht- oder Wärmestrahlen, deren Identität seit den Versuchen von Melloni als erwiesen gelten konnte, ferner auch durch Vermittelung von Elektrizität, möge dieselbe auf chemischem Wege oder durch Aufwand von mechanischer Arbeit entstanden sein.

Wenn auch jede einzelne dieser Tatsachen schlagend gegen die materielle Auffassung der Wärme spricht, so waren die Vertreter der mechanischen Wärmetheorie, unter denen außer den erwähnten noch besonders Th. Young, Ampère, Fresnel zu nennen sind, doch bis gegen die Mitte des 19. Jahrhunderts in der entschiedenen Minderzahl, und niemals wurde bis dahin ernstlich der Versuch gemacht, das Prinzip der Unmöglichkeit des perpetuum mobile in ähnlicher Weise wie von Carnot für die materielle, so für die mechanische Theorie auszubilden.

Vereinzelte Spuren derartiger Bestrebungen kann man allerdings gelegentlich antreffen: so findet sich in der Schrift: Etude sur l'influence des chemins de fer (1839) von Séguin aîné[1]) folgende Bemerkung: Der Dampf ist nur das Mittel, die Kraft zu erzeugen; die treibende Ursache ist die Wärme, die ebenso wie die lebendige Kraft Leistungen zu vollbringen vermag. Séguin schreibt die Autorschaft dieses Gedankens seinem Onkel, dem bekannten J. M. Montgolfier (1740 bis 1810), zu.

Aber nicht allein auf das Gebiet der Wärme: auch auf andere Naturerscheinungen erstreckten sich diese Überlegungen, wobei wir wieder die schon öfters hervorgehobene

1) Séguin aîné: Etude sur l'influence des chemins de fer. Paris 1839, p. 378. Vgl. Compt. Rend. XXV, p. 420, 1847.

Tatsache bestätigt finden, daß die Gültigkeit des Prinzips selber von niemand in Zweifel gezogen wurde, sondern daß nur die Auffassung der Konsequenzen zu Meinungsverschiedenheiten Veranlassung gab.

Roget[1]) glaubte z. B. das Prinzip als Beweismittel gegen die elektrische Kontakt-Theorie verwerten zu können, indem er folgendermaßen argumentiert: „Alle Kräfte und Quellen der Bewegung, mit deren Ursache wir bekannt sind, werden, wenn sie ihre eigentümliche Wirkung üben, verausgabt in demselben Verhältnis als diese Wirkungen hervorgebracht werden, und daraus entspringt die Unmöglichkeit, durch sie einen immerwährenden Effekt, oder mit anderen Worten: eine immerwährende Bewegung hervorzubringen." Roget erklärt es daher für unmöglich, einen dauernden Strom zu erzeugen ohne entsprechenden Aufwand eines anderen Agens (hier chemische Affinität) und wendet sich damit gegen die Kontakttheorie; er hätte auch vollständig Recht, wenn die Kontakttheorie einen solchen Vorgang zuließe.

In ähnlicher Weise äußert sich Faraday[2]): „Die Kontakttheorie nimmt an, daß eine Kraft, die mächtige Widerstände zu überwinden imstande ist, aus nichts entspringen kann. Das würde eine Schöpfung von Kraft sein, die sonst nirgends stattfindet ohne eine entsprechende Erschöpfung von etwas ihr Nahrung Gebendem. Wäre die Kontakttheorie richtig, so müßte die Gleichheit von Ursache und Wirkung geleugnet werden. Dann würde auch das perpetuum mobile möglich sein und es würde leicht sein, auf den ersten Fall eines durch Kontakt erzeugten elektrischen Stromes unaufhörlich mechanische Effekte zu erzielen." Es braucht hier nicht ausgeführt zu werden, daß diese Einwürfe gegen die Kontakttheorie auf einem Mißverständnis beruhen. Der

1) Roget: Treatise on galvanism, 1829, p. 113. (Library of useful knowledge.)

2) M. Faraday: Exp. Researches. Phil. Trans. London pt. I. p. 93, 1840. Pogg. Ann. 53, p. 548, 1841.

ganze Streit bezieht sich ja überhaupt nicht auf die Art der Unterhaltung des elektrischen Stromes, sondern auf die Ursache der Einleitung des Stromes; denn daß ein Strom nicht ohne beständigen Verbrauch von Energie unterhalten werden kann, ist heutzutage nach der Kontakttheorie ebenso selbstverständlich wie nach der chemischen Theorie.

Auch in der Chemie finden wir schon Anwendungen des Prinzips. Der Gedanke, daß die durch eine Reihe aufeinanderfolgender chemischer Reaktionen im ganzen erzeugte Wärmemenge unabhängig davon ist, auf welchem Wege oder in welcher Reihenfolge die einzelnen Reaktionen vorgenommen werden, wenn nur der Anfangszustand und der Endzustand des Systems der nämliche bleibt, hat sich ganz allmählich und geräuschlos in die theoretische Chemie eingebürgert. Ausdrücklich wird er vielleicht zum ersten Male von Heß[1]) erwähnt mit den Worten: „Wenn eine Verbindung stattfindet, so ist die entwickelte Wärmemenge konstant, es mag die Verbindung direkt oder indirekt geschehen." Ohne Zweifel entspringt die überzeugende Wahrheit dieses Satzes aus der Idee, daß man Wärme nicht aus nichts erzeugen kann; unterstützt wird dieser Gedanke natürlich durch die Vorstellung der Unzerstörbarkeit des Wärmestoffs, allein er ist doch noch allgemeiner und unabhängig von dieser Vorstellung.

Wie weit aber einzelne Physiker schon in der Erkenntnis der Einheit und gegenseitigen Verwandelbarkeit der verschiedenen Naturkräfte gekommen waren, das zeigt am besten folgende Stelle aus einer Abhandlung von K. Fr. Mohr[2]) über die Natur der Wärme, in welcher der Verfasser, hauptsächlich angeregt durch die Versuche von Melloni und

1) H. Heß: Thermochemische Untersuchungen. Pogg. Ann. 50, p. 392, 1840.

2) K. Fr. Mohr: Über die Natur der Wärme. Zeitschr. f. Physik v. Baumgärtner, V, p. 419, 1837. Ann. d. Pharmazie 24, p. 141, 1837.

von Rumford, lebhaft für die dynamische Theorie der Wärme eintritt: „Außer den bekannten 54 chemischen Elementen gibt es in der Natur der Dinge nur noch Ein Agens, und dies heißt Kraft; es kann unter den passenden Verhältnissen als Bewegung, chemische Affinität, Kohäsion, Elektrizität, Licht, Wärme und Magnetismus hervortreten, und aus jeder dieser Erscheinungsarten können alle übrigen hervorgebracht werden. Dieselbe Kraft, wenn sie den Hammer hebt, kann, wenn sie anders angewendet wird, jede der übrigen Erscheinungen hervorbringen." Man sieht: es ist nur noch ein Schritt bis zur Frage nach dem gemeinschaftlichen Maß aller dieser als gleichartig erkannten Naturkräfte.

Dieser Schritt wurde fast gleichzeitig von verschiedenen Seiten und auf verschiedene Weise getan. Wenn wir der chronologischen Ordnung der einzelnen Publikationen folgen, so müssen wir zuerst den Arbeiten des Heilbronner Arztes Dr. Julius Robert Mayer[1]) unsere Aufmerksamkeit zuwenden.

Entsprechend der ganzen Geistesrichtung Mayers, der lieber philosophisch generalisierte, als empirisch stückweise aufbaute, war die Form seiner Beweisführung eine deduktive. In seinem ersten, im Mai des Jahres 1842 erschienenen kurzen Aufsatz[2]) spricht er sich in folgender Weise aus: Niemals kann eine Wirkung ohne Ursache entstehen, oder umgekehrt eine Ursache ohne Wirkung bleiben: Ex nihilo nihil fit, und umgekehrt: Nil fit ad nihilum. Jede Ursache hat vielmehr eine ganz bestimmte, ihr gerade entsprechende Wirkung, keine größere und keine kleinere, in der Ursache ist also gerade alles enthalten, was die Wirkung bedingt, und findet sich vollständig in der Wirkung wieder, wenn auch in anderer Form. Ursache und Wirkung sind also in gewissem

1) J. R. Mayer: Die Mechanik der Wärme, Stuttg. 1867, 2. verm. Aufl. Stuttg. 1874.

2) J. R. Mayer: Lieb. Ann. 42, p. 233, 1842. Bemerkungen über die Kräfte der unbelebten Natur. — Phil. Mag. (3) 24, p. 371, 1844.

Sinne einander gleich: Causa aequat effectum. Daher bezeichnet Mayer die Ursachen als quantitativ unzerstörbare und qualitativ wandelbare Objekte. Nun zerlegt er alle Ursachen in zwei Teile: die einen rechnet er zur Materie, die andern zur Kraft; jede dieser beiden Arten ist unzerstörbar, und es findet auch zwischen ihnen wechselseitig kein Übergang statt, d. h. Materie läßt sich nicht in Kraft verwandeln, und ebensowenig umgekehrt, wohl aber läßt sich die Materie sowohl als auch die Kraft für sich auf mannigfache Weise umformen. Während es aber noch viele verschiedene Arten von Materie gibt, nämlich die chemischen Elemente, die sich nicht ineinander umwandeln lassen, kennen wir von der Kraft nur eine Art, denn alle Kräfte lassen sich ineinander verwandeln, alle Kräfte sind verschiedene Erscheinungsformen eines und desselben Objektes, einer und derselben Ursache.

Es versteht sich, daß hier das Wort Kraft im Leibnizschen Sinne genommen ist, was um so weniger auffallend erscheint, als diese Bedeutung des Wortes in der damaligen Zeit noch ziemlich häufig vorkommt. Jedenfalls darf man Mayer deshalb nicht den Vorwurf der Unklarheit machen; denn, wie das Folgende zeigt, wußte er sehr wohl zwischen diesen Begriffen zu unterscheiden. Die Newtonsche Kraft nennt er Eigenschaft. Näher eingehend auf die Natur der verschiedenen Kräfte macht er drei Formen namhaft: Wärme, Fallkraft und Bewegung. Sie sind unter sich verschieden, aber nach bestimmten Zahlenverhältnissen in einander verwandelbar und daher auch einem gemeinschaftlichen Maß unterworfen. Fallkraft und Bewegung mißt man ohnehin nach dem nämlichen Maß, es bleibt also noch übrig, die Einheit der Wärme mit diesem Maß zu vergleichen. Aus Versuchen über die „Kompression der Luft" berechnet Mayer, daß eine Kalorie äquivalent ist der Hebung eines Kilogramms um 365 Meter, bei mittleren Werten der Beschleunigung der Schwere. Dieser Berechnung, deren Detail

erst in einer darauffolgenden Abhandlung[1]) mitgeteilt wird, liegt der Gedanke zugrunde, daß die durch viele Versuche festgestellte Differenz der Wärmemengen, die man einem Quantum Luft zur Erzielung einer bestimmten Temperaturerhöhung von außen zuführen muß, wenn die Erwärmung einmal bei konstantem Druck, das andere Mal bei konstantem Volumen erfolgt, äquivalent ist der im ersten Fall durch die Ausdehnung der Luft geleisteten Arbeit. Hierbei ist allerdings stillschweigend vorausgesetzt, daß der Überschuß der Wärmekapazität bei konstantem Druck über die bei konstantem Volumen lediglich der äußeren Arbeitsleistung zugute kommt, eine Annahme, die durchaus nicht ohne weiteres zulässig ist, da die meisten Gase und Dämpfe eine merkliche Temperaturerniedrigung zeigen, auch wenn sie sich ohne jede äußere Arbeitsleistung ausgedehnt haben. Für die sogenannten vollkommenen Gase hat sich indessen jene Annahme, die in der Folge unter der Bezeichnung: Mayers Hypothese in der weiteren Entwickelung der Wärmetheorie eine Rolle spielt, als richtig bewährt.

Nachdem so das mechanische Wärmeäquivalent festgestellt ist, kann man nun die Wärme mit dem nämlichen Maß messen wie mechanische Kraft, indem man immer eine Kgr. Kalorie gleich $365 \cdot 9{,}81$ Kraft- (Arbeits-) Einheiten, bezogen auf Kilogramm, Meter und Sekunde, setzt. Bemerkenswert ist die Tatsache, daß Mayer durchaus nicht von der Ansicht ausging, daß Wärme Bewegung sei, sondern daß er vorsichtigerweise die Frage nach dem Wesen der Wärme ganz aus dem Spiele ließ. Er sagt ausdrücklich: Wärme, Bewegung und Fallkraft lassen sich nach bestimmten Zahlenverhältnissen ineinander umsetzen; so wenig man nun hieraus den Schluß ziehen wird, daß Fallkraft und Bewegung identisch sind, ebensowenig darf man schließen, daß Wärme

1) Mayer: Die organische Bewegung in ihrem Zusammenhang mit dem Stoffwechsel, 1845. (Mechanik d. Wärme, Stuttg. 1874.)

in Bewegung bestehe. In der Tat läßt sich ja die ganze Wärmetheorie, wie sie später von R. Clausius auf seinen beiden Hauptsätzen aufgebaut wurde, ebenso auch ohne die Vorstellung von der mechanischen Natur der Wärme ableiten, wenn man sich nur an die Annahme hält, daß Wärme unter gewissen Bedingungen in Bewegung umgewandelt werden kann. Erst die später entwickelte Gastheorie hat den Vorstellungen, die wir uns vom Wesen der Wärme machen, eine bestimmtere Form gegeben.

Mayer bleibt bei den eben geschilderten Ausführungen nicht stehen. In einer zweiten, etwas ausführlicheren Abhandlung[1]) erweitert er seine Theorie auf andere Zweige der Naturwissenschaft. Er bezeichnet die Chemie als die Lehre von den Verwandlungen der Materie, die Physik als die Lehre von den Verwandlungen der Kraft, und stellt dann noch einmal seine Ansichten über die Äquivalenz von Wärme und Bewegung zusammen. Dann wird auch die Elektrizität in den Kreis der Betrachtungen gezogen, aber auch wieder unter Benutzung einer Terminologie, die mit dem herrschenden Sprachgebrauch leider in Widerspruch stand. Die Elektrizität nennt er eine Kraft wie die Wärme, wobei er natürlich das meint, was wir als elektrisches Potenzial bezeichnen. Die Wirkung des Elektrophors erklärt er ganz richtig durch die aufgewendete mechanische Arbeit. Auch die „chemische Differenz" zweier Körper wird als Kraft eingeführt, denn durch sie kann Wärme produziert werden, deren Betrag dann das Maß abgibt für die aufgewendete Kraft. Schließlich zählt er als in der anorganischen Natur wirkend sechs verschiedene nach bestimmten Äquivalenten ineinander verwandelbare Kräfte auf: Fallkraft, Bewegung, Wärme, Magnetismus, Elektrizität, chemische Differenz. Auch auf die organische Natur werden die Konsequenzen ausgedehnt, namentlich entwickelt

1) Mayer: Die organische Bewegung in ihrem Zusammenhang mit dem Stoffwechsel, 1845. (Mechanik d. Wärme, Stuttg. 1874.)

Metaphysische streifende Begründung seiner Lehre auf recht schwachen Füßen stand, wird man wohl denen einräumen müssen, die seine Bedeutung nicht recht anerkennen wollen. Allein unumstößlich fest steht es, daß er der Erste war, der den Gedanken, welcher für unsere heutige Naturwissenschaft charakteristisch ist, nicht nur öffentlich ausgesprochen, sondern auch, worauf es ja am meisten ankommt, nach Maß und Zahl verwertet und auf alle ihm zugänglichen Naturerscheinungen im einzelnen angewendet hat. Und was die Begründung des Satzes anbelangt, so dürfen wir doch nicht vergessen, daß derselbe, wie wir im nächsten Abschnitt näher ausführen werden, eben wegen seiner Allgemeinheit überhaupt keines streng deduktiven Beweises fähig ist, daß also dasjenige, was Mayer bei seinem Beweisverfahren mißglückte, auch von keinem anderen Physiker geleistet wurde. Der unmittelbarste, von allen Voraussetzungen möglichst freie Beweis wird durch die Untersuchung der einzelnen Konsequenzen geliefert, und hierzu hat Mayer, wenn er auch nicht selber experimentierte, doch durch direkte Anregung ein Erhebliches beigetragen. — Sucht man aber das Prinzip sich klar und anschaulich zu machen, d. h. mit anderen uns geläufigen Vorstellungen und Sätzen in Zusammenhang zu bringen, so sind die Mayerschen Ausführungen, die auf dem Gedanken beruhen, daß keine Wirkung in der Natur verloren geht, immer noch mit das Beste dieser Art. Dieselben dürfen in ihrer Bedeutung auch nicht unterschätzt werden; denn wenn wir nicht irren, so ist die verhältnismäßig überraschende Schnelligkeit und Leichtigkeit, mit der sich ein Satz von so enormer Tragweite, wie der der Erhaltung der Energie, nach Überwindung der ersten Schwierigkeiten in den Geistern heimisch machte, nicht nur den vielen einzelnen induktiven Beweisen zuzuschreiben, sondern zum großen Teil auch der Vorstellung seines innigen Zusammenhangs mit dem Gesetz von Ursache und Wirkung. Wenn wir daher den Mayerschen philosophischen Betrach-

tungen gewiß keine physikalische Beweiskraft werden zusprechen können, so haben sie doch insofern eine eminente praktische Wichtigkeit, als sie die Übersicht über den gesamten Inhalt des Prinzips erleichtern und so die leitenden Ideen angeben, nach welchen die Fragestellung an die Natur erfolgen muß. Man liebt es manchmal, dem etwas ins Unbestimmte philosophierenden Mayer seinen Partner Joule als den nüchternen, sich nur an die einzelnen Tatsachen haltenden exakten Empiriker gegenüberzustellen; allein wie wäre es denkbar, daß Joule seine berühmten Versuche mit diesem rastlosen Eifer und dieser zähen Ausdauer durchgeführt und geradezu einen Teil seines Lebens an die Beantwortung dieser einen Frage gesetzt hätte, wenn er nicht schon von vornherein, bei seinen ersten Experimenten, die doch gewiß für sich allein genommen noch kein Recht zu einer solch großartigen Verallgemeinerung gaben, begeistert worden wäre für die neue Idee und dieselbe sogleich in ihrer ganzen Allgemeinheit erfaßt hätte. Daß übrigens die Verdienste Mayers in der neueren Zeit vollauf gewürdigt (in England wurden sie zuerst durch J. Tyndall[1]) ins rechte Licht gesetzt) und von unseren ersten Kapazitäten der Wissenschaft in durchaus befriedigender Weise anerkannt worden sind,[2]) dürfte bekannt genug sein.

Allerdings bleibt es eine nicht mehr abzuändernde Tatsache, daß Mayer, wenigstens in der ersten Zeit seines öffentlichen Auftretens, so gut wie gar keinen Einfluß auf die Verbreitung und Entwickelung des neuen Prinzips hatte: dieselbe wäre ohne ihn wahrscheinlich gerade ebenso schnell vor sich gegangen, zumal da fast gleichzeitig und völlig unabhängig, sowohl von ihm als auch untereinander, die näm-

1) J. Tyndall: On force. Proc. of Roy. Inst. June 6, 1862. Phil. Mag. (4) 24, p. 57, 1862.

2) H. v. Helmholtz: Robert Mayers Priorität. Vorträge und Reden, I, Braunschw. 1884, p. 60. R. Clausius: Über das Bekanntwerden der Schriften Robert Mayers. Wied. Ann. 8, Anhang, 1879.

lichen Ideen in verschiedenen Formen und mit verschiedener Begründung auftauchten.

Am 24. Januar 1843 legte James Prescott Joule (Brauer in Salford) der philosophischen Gesellschaft von Manchester eine Abhandlung[1]) vor über den Zusammenhang der thermischen und der chemischen Wirkungen des galvanischen Stromes. Er war schon durch die Ergebnisse zweier vorhergehender Arbeiten[2]) zu der Überzeugung geführt worden, daß die durch einen Strom im Schließungskreis erzeugte Wärmemenge identisch ist mit derjenigen, welche durch direkte Oxydation der in der Kette wirksamen Metalle, einschließlich Wasserstoff, gewonnen werden kann, und hatte sich daraus die Ansicht gebildet, daß überhaupt die chemische Wärme wesentlich elektrischen Ursprungs sei. Es ist von hohem Interesse, zu verfolgen, wie sich bei Joule aus anfänglich noch etwas unbestimmten Vorstellungen allmählich in schrittweiser, vorsichtiger Entwickelung die ganze Klarheit des Bewußtseins von der Gültigkeit des allgemeinen Prinzips herausarbeitete. Erst in der oben genannten Abhandlung, in welcher der Satz, daß die Wärmewirkungen eines Stromes mit den chemischen äquivalent sind, weiter ausgeführt und bestätigt wurde (vgl. übrigens auch die Versuche von Becquerel,[3]) findet sich zum ersten Male die allgemeinere Bemerkung, daß in der Natur Vernichtung (annihilation) von Arbeitskraft (power) ohne eine entsprechende

1) J. P. Joule: On the heat evolved during the electrolysis of water. Mem. of the liter. and phil. soc. of Manchester. (2) vol. VII, 1846, p. 87 u. 96.

2) J. P. Joule: On the heat evolved by metallic conductors of electricity and in the cells of a battery during electrolysis. Phil. Mag. (3) 19, p. 260, 1841.

J. P. Joule: On the electric origin of the heat of combustion. Phil. Mag. (3) 20, p. 98, 1842.

3) E. Becquerel: Des lois du dégagement de la chaleur pendant le passage des courants électriques à travers les corps solides et liquides. Compt. Rend. t. 16, p. 724, 1843.

Wirkung (effect) nicht stattfindet. Zugleich wird die Vermutung ausgesprochen, daß, wenn man durch Einschaltung einer elektromagnetischen Maschine einen Strom Arbeit verrichten ließe, die im Verhältnis zur chemischen Wirkung produzierte Wärme sich verringern würde, und zwar proportional der geleisteten Arbeit.[1])

Dieser Gedanke veranlaßte Joule zu einer besonderen Untersuchung, deren Resultat[2]) er am 21. August desselben Jahres der mathematisch-physikalischen Sektion der damals in Cork tagenden British Association mitteilte: über elektromagnetische Wärmewirkungen und über den mechanischen Wert der Wärme. In dieser Arbeit setzt Joule zunächst seine Ansichten über die Natur der Wärme und die Vorgänge in der galvanischen Kette besonders auseinander. Er erklärt die Wärme für eine Art Bewegung, die in Schwingungen besteht, und spricht die Überzeugung aus, daß in der galvanischen Kette keine Erzeugung (generation), sondern nur eine Verteilung (arrangement) von Wärme stattfindet. So entspringt die im hydroelektrischen Strom entwickelte Wärme aus der Verbrennung im Element, die im magnetelektrischen, d. h. durch Bewegung von Magneten erzeugten Strom aus der aufgewendeten mechanischen Arbeit, und ist immer gerade so groß, als wenn die Verbrennung oder die Arbeit direkt Wärme geliefert hätte. — Diese Behauptungen werden durch den Versuch gerechtfertigt. Zu diesem Zwecke ließ Joule eine Induktionsspirale, die sich in einer mit Wasser gefüllten, als Kalorimeter dienenden horizontal gelegten Glasröhre befand, um eine vertikale Achse zwischen zwei starken Magnetpolen mittelst herabfallender Gewichte rotieren und verglich die durch die Induktionsströme in der Spirale erzeugte Wärme mit der von den Gewichten geleisteten mechanischen Arbeit. Es ergab sich, daß der Erwärmung einer

1) l. c. p. 96 u. 104.

2) Joule: On the calorific effects of magneto-electricity and on the mechanical value of heat. Phil. Mag. (3) 23, p. 263, 347, 435, 1843.

beliebigen Quantität Wasser um 1° Fahrenheit die Hebung der 838fachen Quantität um 1 engl. Fuß oder der einfachen Quantität um 838 Fuß entspricht. Dies bedeutet für 1 Celsius-Kalorie die Hebung eines Kilogramms um 460 Meter. — Andrerseits maß Joule auch die direkte Umsetzung von mechanischer Arbeit in Wärme, und zwar mittelst der Reibung, welche auftritt, wenn Wasser durch enge Röhren gepreßt wird. Als mechanisches Wärmeäquivalent, bezogen auf F. Grade, ergaben sich diesmal 770 Fuß (für C. Grade 423 M.).

Die beiden gefundenen Zahlen hielt Joule in Anbetracht der vielen Fehlerquellen für hinreichend übereinstimmend, um darauf dieselbe Behauptung wie Mayer stützen zu können: Die Grundkräfte der Natur sind unzerstörbar, und überall, wo Kraft aufgewendet wird, entsteht ein dem Aufwand entsprechendes Quantum Wärme. Von diesem Standpunkt aus erklärt er auch die latente Wärme und die durch chemische Prozesse erzeugte Wärme. Die latente Wärme repräsentiert auch eine Kraft, wie die Schwere, sie vermag sich im gegebenen Fall in wirkliche Wärme umzusetzen, wie ein aufgezogenes Uhrwerk jeden Augenblick imstande ist, mechanische Arbeit zu leisten.

Einen besonderen Erfolg errang Joule mit seinen ersten Arbeiten nicht, im Gegenteil: es verhielten sich die meisten Physiker im wesentlichen ablehnend gegen die hier vorgetragenen Ansichten. Ein Hauptgrund dafür mag in dem allgemeinen Mißtrauen zu suchen sein, welches damals in naturwissenschaftlichen Kreisen gegen alles herrschte, was irgendwie nach Naturphilosophie aussah. Aber in demselben Jahr, in welchem Joules erste Arbeiten erschienen, am 1. November 1843, teilte der dänische Ingenieur A. Colding der Akademie von Kopenhagen, unter dem Titel: „Thesen über die Kraft", Versuche[1]) mit, wonach die bei der Rei-

1) A. Colding: Det kongel. danske vidensk. selsk. naturv.

bung fester Körper entwickelte Wärme mit der verbrauchten Arbeitsgröße in einem konstanten Verhältnis steht, und sprach zugleich die Ansicht aus, daß das Gesetz der Erhaltung der Kraft ein allgemein gültiges sei. Er war auf diesen Satz, ebenso wie Mayer, durch deduktive Betrachtungen gekommen, die jedoch weit in das Gebiet der Metaphysik hineinreichen, indem er von der Ansicht ausging, daß die Naturkräfte geistige und immaterielle Wesen seien, und als solche unmöglich der Vergänglichkeit unterworfen sein könnten; daher bezeichnet er die Kraft als unsterblich. — Aus einer ansehnlichen Reihe von Reibungsversuchen mit verschiedenen festen Körpern fand er als mechanisches Wärmeäquivalent, bezogen auf Cels. Grade und dänische Fuß die Zahl 1185,4 (ca. 370^m).

Eine vierte, in dieselbe Zeit fallende Berechnung des mechanischen Wärmeäquivalents rührt her von C. Holtzmann.[1]) Dieser fand, wesentlich auf demselben Wege wie Mayer, daß die Wärme, welche die Temperatur eines Kilogramms Wasser um 1^0 C. erhöht, imstande ist 374 Kgr. 1 Meter hoch zu heben; indes muß hier bemerkt werden, daß Holtzmann keineswegs in dem Sinne den Standpunkt der mechanischen Wärmetheorie vertrat, daß er ein Verschwinden der Wärme annahm; vielmehr hielt er im wesentlichen an der materiellen Theorie fest, da er immer noch den Satz von der Unveränderlichkeit des Wärmefluidums verteidigte.[2])

Unterdessen setzte der rastlos tätige Joule seine Versuche über das Wärmeäquivalent mit gänzlich veränderten

---

og math. afh. (5) II, 1843, p. 121, 167. On the history of the principle of the conservation of energy, Phil. Mag. (4) 27, p. 56, 1864.

1) C. Holtzmann: Über die Wärme und Elastizität der Gase u. Dämpfe. Mannheim 1845. Auszug in Pogg. Ann. Erg. II, p. 183, 1848.

2) C. Holtzmann: Über die bewegende Kraft der Wärme. Pogg. Ann. 82, p. 445, 1851.

R. Clausius: Erwiderung auf die Bemerkungen des Herrn C. Holtzmann. Pogg. Ann. 83, p. 118, 1851.

Methoden fort. Zunächst verglich er[1]) die bei der Kompression von Luft aufgewendete mechanische Arbeit mit der dabei eintretenden Temperaturerhöhung und fand wieder die vermutete Proportionalität. Daß diese Temperaturerhöhung gerade durch die äußere Arbeit und nicht etwa durch eine Veränderung der Wärmekapazität der Luft hervorgerufen wird, zeigte er durch einen besonderen Versuch, indem er bis zu 22 Atmosphären komprimierte Luft in einen evakuierten Raum ausströmen ließ. Es zeigte sich in diesem Falle, in Übereinstimmung mit einem schon früher von Gay Lussac erhaltenen Resultat, nach dem Eintritt des Gleichgewichts keine Temperaturabnahme, entsprechend dem Umstande, daß die Luft beim Ausströmen keine äußere Arbeit zu leisten hatte. Dieser Versuch ist deshalb so wichtig, weil er beweist, was Mayer stillschweigend angenommen hatte (S. 26), daß bei Volumenänderungen der Luft keine innere Arbeit geleistet wird. Ließ er dagegen verdichtete Luft in die freie Atmosphäre ausströmen, so ergab sich eine Temperaturabnahme, proportional der durch die Überwindung des Widerstandes geleisteten Arbeit. Daraus berechnete Joule nach verschiedenen Versuchsreihen das mechanische Wärmeäquivalent zu 823, dann zu 795 (452, 436^m Cels.).

Kurz darauf erschienen wieder andere Beobachtungen.[2]) Diesmal wurde die mechanische Arbeit durch Reibung in Wärme verwandelt. Ein Schaufelrad wurde durch herabsinkende Gewichte in einem Wasserbad in Rotation versetzt und verursachte durch die Reibung eine Temperaturerhöhung des Wassers. Hieraus folgte das Wärmeäquivalent 890 (488^m Cels.), während die bei der Pressung von Wasser durch enge Röhren gefundene Zahl 774 (425^m Cels.) betrug.

---

1) Joule: On the changes of temperature produced by the rarefaction and condensation of air. Phil. Mag. (3) 26, p. 369, 1845.

2) Joule: On the existence of an equivalent relation between heat and the ordinary forms of mechanical power. Phil. Mag. (3) 27, p. 205, 1845.

Die verhältnismäßig gute Übereinstimmung seiner Resultate veranlaßte Joule, eine kurze Zusammenfassung seiner durch alle diese verschiedenen Versuche bestätigten Ansichten über die Gesetze der Krafterzeugung durch mechanische, chemische, galvanische, elektromagnetische, thermische Wirkungen, sowie durch tierische Arbeitsleistung zu veröffentlichen.[1])

Während sich so die Zahl der Arbeiten mehrte, die auf Grund der neuen Auffassung des Wesens der Wärme die Anwendung des Prinzips der Erhaltung der Kraft förderten, und während besonders die unausgesetzt wiederholten und variierten Versuche von Joule die Aufmerksamkeit der Fachgenossen allmählich auf sich lenkten, wurde der Energiebegriff auch von anderen Seiten her in andere Zweige der Naturwissenschaft eingeführt.

Hierher kann man die Untersuchungen von F. Neumann[2]) (1845 und 1847) über die Gesetze der induzierten Ströme rechnen, welche zu dem Resultat führten, daß die galvanische Induktion in einem Leiter nur abhängt von der Veränderung des elektrodynamischen Potenzials des induzierenden Stromsystems auf den Leiter, einerlei, ob diese Veränderung von einer relativen Bewegung der ponderabeln Teile des Leiters und des Stromsystems oder von einer Änderung der Intensitäten der Ströme herrührt. Allerdings tritt in den beiden Schriften von Neumann, welche diesen Gegenstand behandeln, der innige Zusammenhang seines Satzes mit unserem Prinzip noch nicht direkt hervor.

Auch auf das Gebiet der organischen Natur wurden die

1) Scoresby and Joule: Experiments and observations on the mechanical powers of electro-magnetism, steam and horses. Phil. Mag. (3) 28, p. 448, 1846.

2) Franz Ernst Neumann: Allgemeine Gesetze der induzierten Ströme. Abh. d. kgl. Akad. d. Wiss. Berlin 1845. Pogg. Ann. 67, p. 31, 1846.

F. Neumann: Über ein allgemeines Prinzip der mathematischen Theorie induzierter elektrischer Ströme. Abh. d. kgl. Akad. d. Wiss. Berlin 1847. G. Reimer 1848.

neuen Ideen übertragen. J. Liebig, der von der Ansicht ausging, daß eine Dampfmaschine nicht mehr Wärme hervorbringen kann, als sie ursprünglich vom Kessel empfangen hat, und daß ein galvanischer Strom im Schließungskreis nicht mehr Wärme erzeugt, als durch gewöhnliche chemische Reaktion der im Element sich umsetzenden Stoffe erhalten wird, verteidigte energisch den Satz, daß die vom tierischen Körper produzierte Wärme vollständig durch die Verbrennung der Nahrungsmittel auf direktem Wege geliefert wird.[1]) Hierbei ergab sich allerdings für ihn die Schwierigkeit, daß die von Dulong und die von Despretz über die vom tierischen Körper abgegebene Wärme angestellten kalorimetrischen Versuche Zahlenwerte ergaben, welche beträchtlich zu groß erschienen, da die direkte Verbrennungswärme der entsprechenden Wasserstoff- und Kohlenstoffmengen nur 70 bis 90% der wirklich vom Tier abgegebenen betrug. Die richtige Erklärung dieses Umstandes wurde durch Helmholtz gegeben, welcher betonte,[2]) daß man statt der durch Verbrennung der Nahrungsmittel erhaltenen Wärme nicht ohne weiteres die Verbrennungswärme der in ihnen enthaltenen chemischen Elemente setzen dürfe.

In dem angegebenen Aufsatz von Helmholtz finden wir zugleich in aller Kürze einen Überblick über die verschiedenen Folgerungen, welche der allgemeinen Durchführung des „Prinzips von der Konstanz des Kraftäquivalents bei der Erregung einer Naturkraft durch eine andere" in verschiedenen Gebieten der Physik bei dem damaligen Stande der Forschung entsprechen würden. In bezug auf die Verwandlung von mechanischer Kraft in Wärme kommt Helmholtz allerdings noch nicht bis zur Besprechung des mechanischen Wärmeäquivalents, obwohl er sich aus näherliegenden, schon oben

1) J. Liebig: Über die tierische Wärme. Lieb. Ann. 53, p. 63, 1845.

2) H. Helmholtz: Fortschr. d. Phys. v. J. 1845, p. 346, Berlin 1847. Wiss. Abh. I p. 8.

angeführten Gründen gegen die bisherige materielle Theorie und für eine Bewegungstheorie entscheidet. Dagegen erwähnt er das Gesetz von der Konstanz der chemischen Wärmeerzeugung, unabhängig von dem Wege, auf dem die Verbindung hergestellt wird. In bezug auf die in konstanten hydroelektrischen Strömen sich abspielenden Prozesse führt das Ohmsche Gesetz in Verbindung mit dem Lenzschen (Jouleschen) Gesetz über die Wärmeerzeugung im Schließungskreis und dem Faradayschen elektrolytischen Gesetz zu dem Satz, daß die gesamte im Schließungskreis erzeugte Wärme äquivalent ist der Größe des elektrochemischen Umsatzes in der Kette, unabhängig von der sonstigen Anordnung. Für die Wärmeerzeugung durch statische Elektrizität folgt aus den Sätzen von Rieß über die Entladungswärme, daß diese gleich ist dem Produkt aus der entladenen Elektrizitätsmenge in ihre Dichtigkeit (jetzt besser: Spannung).

Weiter ausgebildet und in mehr systematische Form gebracht erscheinen diese Betrachtungen in der Schrift von Helmholtz, die diesem Aufsatz auf dem Fuße folgte, und in der zum ersten Male die universale Bedeutung des Prinzips der Erhaltung der Kraft für alle Naturerscheinungen von der Höhe des Standpunktes der damaligen Entwickelung der Physik in gedrängter Übersicht entwickelt wurde.

Am 23. Juli 1847 hielt Hermann Helmholtz in der Sitzung der physikalischen Gesellschaft zu Berlin einen Vortrag über das Prinzip der Erhaltung der Kraft.[1]) — In diesem, wie in den anderen von ihm gebrauchten Ausdrücken: „Lebendige Kraft“ und „Spannkraft“ schließt sich Helmholtz, ebenso wie Mayer, an den Leibnizschen Begriff der Kraft an, wiewohl er im übrigen die in der Wissenschaft übliche Newtonsche Terminologie beibehält. Für die Art der Einführung des Prinzips ist der Umstand charakteristisch, daß Helmholtz,

1) H. Helmholtz: Über die Erhaltung der Kraft. Berlin, Reimer 1847. Wiss. Abh. I p. 12.

vollständig auf dem Standpunkt der mechanischen Naturanschauung fußend, das Prinzip als eine direkte Verallgemeinerung des mechanischen Satzes von der Erhaltung der lebendigen Kraft (S. 7 f.) auffaßt. Die Einleitung der Abhandlung bildet eine Reihe deduktiver Betrachtungen, aus denen als Ziel der physikalischen Wissenschaften die Aufgabe hervorgeht, die Naturerscheinungen auf Bewegungen einzelner materieller Punkte zurückzuführen, die mit anziehenden oder abstoßenden, in bestimmter Weise von ihren Entfernungen abhängenden Kräften aufeinander wirken. Daß aus dieser Annahme mit Hilfe der Newtonschen Axiome das Prinzip der Erhaltung der lebendigen Kraft hergeleitet werden kann, wird in der Mechanik gelehrt; Helmholtz zeigt aber auch umgekehrt, daß man statt dieses Ausgangspunktes als vollständig gleichbedeutend auch den benutzen kann, welchen schon Carnot und Clapeyron zur Grundlage ihrer Theorien machten, nämlich die Unmöglichkeit des perpetuum mobile. In der Anwendung auf die mechanischen Naturvorgänge spricht Helmholtz diesen Satz folgendermaßen aus: „Denken wir uns ein System von Naturkörpern, welche in gewissen räumlichen Verhältnissen zueinander stehen und unter dem Einfluß ihrer gegenseitigen Kräfte in Bewegung geraten, bis sie in bestimmte andere Lagen gekommen sind, so können wir ihre gewonnenen Geschwindigkeiten als eine gewisse mechanische Arbeit betrachten und in solche verwandeln. Wollen wir nun dieselben Kräfte zum zweiten Male wirksam werden lassen, um dieselbe Arbeit noch einmal zu gewinnen“ (und so eine periodisch arbeitende Maschine zu erhalten), „so müssen wir die Körper auf irgend eine Weise in die anfänglichen Bedingungen durch Anwendung anderer uns zu Gebote stehender Kräfte zurückversetzen; wir werden dazu also eine gewisse Arbeitsgröße der letzteren wieder verbrauchen. In diesem Falle nun ist die Arbeitsgröße, welche gewonnen wird, wenn die Körper des Systems aus der Anfangslage in die zweite, und verloren wird, wenn sie aus der zweiten in

die erste übergehen, stets dieselbe, welches auch die Art, der Weg oder die Geschwindigkeit dieses Überganges sein mögen."

In mathematische Form gebracht stellt sich dieser Satz als das Prinzip der lebendigen Kraft dar. Dies Prinzip in Verbindung mit der Annahme, daß alle Kräfte sich auflösen lassen in solche, die nur von Punkt zu Punkt wirken, führt dann mit Hilfe der Newtonschen Axiome zu der Folgerung, daß die Elementarkräfte Zentralkräfte sind, d. h. anziehend oder abstoßend wirken mit einer Intensität, die nur von der Entfernung abhängt, und diese Annahme ist es gerade, von der oben, im ersten Falle, ausgegangen wurde.

Die Umformung, welche Helmholtz mit dem Prinzip der lebendigen Kraft vornahm, um es als Prinzip der Erhaltung der Kraft erscheinen zu lassen, besteht darin, daß er in der Gleichung, welche die Beziehung der lebendigen Kräfte: L zu der von den wirkenden Kräften geleisteten Arbeit: A ausdrückt $(L = A + \text{konst.})$, statt des Begriffes der Arbeit A den der Quantität der Spannkräfte U einführt, welche Größe der Arbeit A gleich und entgegengesetzt ist. Die Spannkraft hängt also wie die Arbeit nur vom augenblicklichen Zustand des Systems ab, und die obige Gleichung spricht sich nun folgendermaßen aus: Die Summe der Quantitäten der lebendigen und der Spannkräfte ist mit der Zeit unveränderlich: $L + U = \text{konst.}$ Bezeichnen wir diese Summe kurz als die dem System innewohnende Kraft, so haben wir damit den Satz der Erhaltung der Kraft.

So geringfügig diese Umdeutung auch auf den ersten Augenblick erscheinen mag, so unabsehbar weit ist doch die Perspektive, die sich durch sie in alle physikalische Gebiete eröffnet, denn nun fällt die Verallgemeinerung auf beliebige Naturerscheinungen leicht in die Augen. Der Hauptgrund dieses Umstandes mag darin liegen, daß nun das Prinzip der Erhaltung der Kraft in eine Parallele tritt mit dem uns schon lange vertrauten und sozusagen in den Instinkt übergegan-

genen Prinzip der Erhaltung der Materie. Wie die Quantität der in einem Körpersystem vorhandenen, durch das Gewicht gemessenen Materie durch keinerlei Mittel verringert oder vermehrt werden kann, obwohl die verschiedensten physikalischen und chemischen Umwandlungen mit ihr vorgenommen werden können, so stellt auch die Quantität der in dem System vorhandenen Kraft eine selbständige, vollständig unveränderliche Größe vor. Auch die Kraft läßt sich, wie die Materie, in mannigfache Formen bringen, zunächst erscheint sie in zwei Hauptformen: als lebendige Kraft oder als Spannkraft, beide können uns aber noch in der verschiedensten Weise entgegentreten: die lebendige Kraft als sichtbare Bewegung, als Licht, als Wärme, die Spannkraft als Hebung eines Gewichts, als elastische, als elektrische Spannung, als chemische Differenz usw. Aber die Summe aller dieser, gewissermaßen in verschiedenen Magazinen aufgespeicherten Kraftvorräte bleibt unveränderlich dieselbe, und alle Prozesse in der Natur bestehen nur darin, die einzelnen ineinander überzuführen.

Die Helmholtzsche Auffassung unterscheidet sich dadurch wesentlich von der Mayerschen, daß letzterer eine Reihe von qualitativ verschiedenen Kraftformen annimmt, wie Bewegung, Schwere, Wärme, Elektrizität usw., während hier, entsprechend der mechanischen Anschauung, alle verschiedenen Erscheinungsformen unter die beiden Begriffe der lebendigen Kraft und der Spannkraft subsumiert werden, — ein weiterer Schritt in der Vereinfachung der Auffassung aller Naturerscheinungen.

Um nun das Prinzip auf einen beliebigen Prozeß, der in einem System von Körpern vor sich geht, anzuwenden, hat man nur nötig, in irgend einem Zeitpunkt alle verschiedenen Arten von lebendiger Kraft und Spannkraft zusammenzufassen und zu einer Summe zu vereinigen. Diese Summe stellt dann die dem System innewohnende Gesamtkraft vor und ist mit der Zeit unveränderlich, natürlich nur

solange jegliche Einwirkung von außen ausgeschlossen ist. Es versteht sich, daß alle einzelnen Glieder dieser Summe, also alle einzelnen Kraftquantitäten, nach demselben Maße gemessen werden müssen; da wir nun aber in der Physik verschiedene Kraftarten, wie lebendige Kraft der sichtbaren Bewegung, Wärme usw. nach verschiedenem, konventionellem Maß messen, so wird es nötig sein, vor der Summierung jede Kraftart auf das gemeinsame mechanische Maß zurückzuführen, d. h. ihr mechanisches Äquivalent festzustellen, und hierin liegt eine gewisse Schwierigkeit, die sich der Anwendung des Prinzips von vornherein entgegenstellt; eine allgemeine Regel, nach der sich der Äquivalenzwert in jedem Falle von vornherein, unabhängig von dem Prinzip, berechnen läßt, gibt es nicht. Wir haben in der Tat schon wiederholt gesehen, daß die Anwendung des Prinzips durch die Zugrundelegung falscher Äquivalenzwerte zu verkehrten Schlüssen geführt hat; daher ist es nötig, für jede Kraftart im besonderen den Wert des entsprechenden Äquivalents zu prüfen, und dies geschieht am besten durch die Anwendung des Prinzips auf einen besonders einfachen, leicht zu übersehenden Fall. Es ist interessant, von diesem Gesichtspunkt aus den Gedankengang zu verfolgen, den Helmholtz einschlägt bei der Besprechung der verschiedenen physikalischen Erscheinungen in ihrem Zusammenhang mit dem Prinzip der Erhaltung der Kraft.

Zunächst wird das Gebiet der Mechanik im engeren Sinne betrachtet, für welches sich, wie schon erwähnt, das allgemeine Prinzip als der bekannte Satz der lebendigen Kräfte darstellt. Diesem Gesetz gehorchen die Bewegungen, welche unter dem Einfluß der allgemeinen Gravitationskraft vor sich gehen, die Bewegungen inkompressibler fester und flüssiger Körper, soweit nicht durch Reibung oder unelastischen Stoß lebendige Kraft sichtbarer Bewegung verloren geht, endlich die Bewegungen vollkommen elastischer fester und flüssiger Körper; außerdem werden hierher ge-

rechnet die Erscheinungen des Schalles und des Lichtes, sowie der strahlenden Wärme, insofern bei ihnen nicht durch Absorption Vernichtung von Bewegung eintritt. — In allen ausgenommenen Fällen muß nach dem Gesetz der Erhaltung der Kraft die verlorene lebendige Kraft in irgend einer anderen Kraftform zum Vorschein kommen, sie zeigt sich in der Tat bei der Absorption von Wärmestrahlen als Wärme, bei der Absorption von Lichtstrahlen, deren Identität mit den wärmenden und chemisch wirkenden Strahlen Helmholtz bereits anerkennt, entweder als Licht (Phosphoreszenz) oder als Wärme oder als chemische Wirkung. Auch für den Kraftverlust beim Stoß unelastischer Körper und bei der Reibung verlangt das Prinzip der Erhaltung der Kraft Ersatz in irgend einer anderen Form, und diesen Ersatz findet Helmholtz einmal in einer, von einer Vermehrung der Quantität der inneren Spannkräfte begleiteten, Veränderung in der molekularen Konstitution der sich reibenden oder stoßenden Körper, dann in akustischen und elektrischen, besonders aber in thermischen Wirkungen. Er folgert, daß in allen Fällen der Reibung, wo molekulare Änderungen, Elektrizitätsentwickelung usw. vermieden sind, nach dem Prinzip der Erhaltung der Kraft für jeden Verlust an mechanischer Kraft jedesmal eine bestimmte Quantität Wärme entstehen muß, welche der aufgewendeten Arbeit äquivalent ist; hierbei werden die ersten Versuche von Joule zitiert, bei denen allerdings die Messungsmethoden noch zu wenig exakt erscheinen, um vollständiges Vertrauen zu verdienen. (R. Mayers Arbeiten waren damals noch so gut wie unbekannt.) Auch die Carnot-Clapeyronsche Ansicht, daß die Wärme als solche unvergänglich sei und infolgedessen nur durch ihren Übergang aus höherer in tiefere Temperatur mechanische Arbeit erzeugen könne, wird behandelt und in ausführlicher Besprechung als unhaltbar bezeichnet. Für die Annahme einer absoluten Vermehrung der Quantität der Wärme durch Reibung sprechen schon die Versuche von Davy (S. 20), dann

aber zwingt zu dem gleichen Schluß die Wärmeerzeugung durch elektrische Bewegung, namentlich mittelst der Ladung einer Flasche durch den Elektrophor, oder mittelst der Erregung eines Stromes durch einen Magneten. Daraus folgt also, daß die Wärme nicht im Vorhandensein, sondern in Veränderungen oder Bewegungen eines Stoffes besteht, so daß „die Quantität der in einem Körper enthaltenen Wärme aufgefaßt werden muß als die Summe der lebendigen Kraft der Wärmebewegung (freie Wärme) und der Quantität derjenigen Spannkräfte in den Atomen, welche bei einer Veränderung ihrer Anordnung eine solche Wärmebewegung hervorbringen können (latente Wärme, innere Arbeit)."

Was die chemische Erzeugung von Wärme betrifft, so führt Helmholtz den von Heß (S. 23) ausgesprochenen Satz an, daß bei einer chemischen Verbindung stets gleichviel Wärme erzeugt wird, in welcher Ordnung und mit welchen Zwischenstufen auch die Verbindung vor sich gehen möge. Dieser Satz ist zwar ursprünglich aus der Vorstellung von der Unveränderlichkeit des Wärmestoffes hervorgegangen, indes stellt er sich auch als eine Konsequenz des Prinzips der Erhaltung der Kraft heraus.

Es folgt nun eine Betrachtung der Wirkungen der Wärme, von denen hauptsächlich die Erzeugung mechanischer Kraft untersucht wird. Hier werden die Versuche von Joule (S. 36) erwähnt, in denen komprimierte Luft einmal in die Atmosphäre, ein anderes Mal in ein luftleeres Gefäß ausströmt. Im ersten Fall tritt, entsprechend der durch die Überwindung des Luftdrucks geleisteten Arbeit, eine Temperaturerniedrigung der Luft ein, während im letzteren Fall im ganzen keine Temperaturänderung wahrzunehmen ist. Schließlich werden noch die theoretischen Untersuchungen von Clapeyron und von Holtzmann besprochen.

Einen bedeutenden Teil der Abhandlung bilden die Anwendungen des Prinzips auf Elektrizität und Magnetismus, die zum größten Teil als vollständig neu erscheinen. Zu-

nächst wird die statische Elektrizität behandelt, deren Wirkungen als mechanische (Bewegung der Elektrizität mit den Leitern) und thermische (Bewegung in den Leitern) unterschieden werden; hierbei bedient sich Helmholtz des mechanischen, jetzt sogenannten elektrostatischen Maßsystems. Der Wert der Quantität der elektrischen Spannkräfte wird geliefert durch die Summe der Potenziale der verschiedenen in dem betrachteten System vorhandenen elektrisch geladenen Körper aufeinander und auf sich selbst. Helmholtz benutzt hier eine von der jetzt üblichen etwas abweichende Definition des Potenzials, indem er es erstens mit entgegengesetztem Vorzeichen nimmt und außerdem das Potenzial einer Ladung auf sich selbst doppelt so groß rechnet, als jetzt geschieht. Wird also durch die Wirkung der Elektrizität lebendige Kraft (sichtbare Bewegung oder Wärme) erzeugt, so wird ihre Größe gemessen durch die Abnahme der elektrischen Spannkraft. Wenn durch Entladung von Elektrizität nur Wärme erzeugt wird, so ist dieselbe demnach gleich der Zunahme (jetzt: Abnahme) des gesamten elektrischen Potenzials, woraus für Batterien, deren äußere Belegung abgeleitet ist, das Gesetz folgt, daß die Entladungswärme proportional ist dem Quadrate der entladenen Elektrizitätsmenge und der reziproken Ableitungsgröße (Kapazität) der Batterie, unabhängig von der Form des Schließungsdrahtes, wie es durch die Versuche von Rieß im wesentlichen bestätigt wird. Außerdem findet sich wegen der Benutzung des mechanischen Maßsystems in dem Ausdruck für die Entladungswärme als Faktor im Nenner noch das mechanische Wärmeäquivalent.

Übergehend zum Galvanismus bespricht Helmholtz zunächst die beiden sich gegenüberstehenden Hypothesen in betreff der Ursache des galvanischen Stromes: die Kontakttheorie und die chemische Theorie; die erste sucht den Sitz der Erregung des Stromes an der Berührungsfläche der Metalle, die zweite in den chemischen Prozessen der Kette. Helmholtz findet das Äquivalent der durch den galvanischen

Strom geleisteten Arbeit in der durch ihn hervorgerufenen chemischen Zersetzung der Leiter zweiter Klasse, woraus folgt, daß die Kontakttheorie dann in einen Widerspruch mit dem Prinzip der Erhaltung der Kraft treten würde, wenn es einen einzigen Leiter zweiter Klasse (d. h. der nicht dem Spannungsgesetz folgt) gäbe, der durch den Strom nicht zersetzt würde. Die aus dieser Annahme hergeleiteten Angriffe gegen die Kontakttheorie haben wir schon oben (S. 22 f.) erwähnt. Betrachtet man aber von vornherein jeden Leiter zweiter Klasse als Elektrolyten, so involviert die Annahme der Kontaktkraft nicht nur keinen Widerspruch, sondern ergibt auch eine einfache und bequeme Anschauung von dem Wesen der elektrischen Spannung, indem man sich vorstellt, daß die verschiedenen Metalle mit verschiedenen Anziehungskräften auf die Elektrizität wirken. Im Gleichgewichtszustand muß dann die elektrische Spannung gleich der Differenz der lebendigen Kräfte sein, welche eine Elektrizitätseinheit vermöge dieser Anziehungskräfte beim Übergang in das Innere eines jeden Metalls gewinnen würde, also unabhängig von der Größe und der Form der Berührungsfläche. Dann ergibt sich auch für eine Reihe hintereinander verbundener Metalle unmittelbar die Gültigkeit des Spannungsgesetzes, indem dann die elektrische Spannung zwischen dem ersten und letzten Metall unabhängig wird von den dazwischen liegenden Metallen.

Von den galvanischen Ketten betrachtet Helmholtz zunächst solche, welche lediglich chemische Zersetzung, aber keine Polarisation hervorbringen. Hier ergibt sich aus der Gleichheit der elektrischen und der chemischen Wärme unter Zugrundelegung des Ohmschen Gesetzes in bezug auf die Stromstärke, und des Lenzschen Gesetzes in bezug auf die Wärmeentwicklung in der Schließung, daß die elektromotorische Kraft eines Elements (Daniel, Grove) gleich ist der Differenz der Wärmetönungen, die bei der Oxydation der Äquivalente der beiden Metalle und Lösung des Oxyds

in der Säure eintreten. Daraus folgt auch, daß alle Ketten, in denen sich gleiche chemische Prozesse abspielen, auch gleiche elektromotorische Kräfte haben, wofür Versuche von Poggendorff angeführt werden. Auch Ketten mit Polarisation werden der Betrachtung unterzogen, zunächst solche, in denen nur Polarisation, aber keine merkliche chemische Zersetzung stattfindet. Hier erhält man inkonstante, meist bald verschwindende Ströme, die wesentlich nur zur Herstellung des elektrischen Gleichgewichts zwischen Flüssigkeit und Metallen dienen. Wird die Polarisation ursprünglich gleicher Platten durch fremde elektromotorische Kräfte hervorgerufen, so kann man die dabei verlorene Kraft des ursprünglichen Stromes als sekundären (Depolarisations-) Strom wiedergewinnen durch Ausschaltung der erregenden Elemente. Finden die Erscheinungen der Polarisation und der chemischen Zersetzung gleichzeitig statt, so kann man den entstehenden Strom in zwei Teile teilen, den Polarisations- und den Zersetzungsstrom, und diese beiden Teile in der vorigen Weise einzeln betrachten. Immer ist wieder die in der ganzen Schließung erzeugte Wärme, möge die Entwickelung derselben überall proportional dem Quadrate der Stromintensität oder, wie es Helmholtz auch annimmt, an gewissen Stellen nach einem anderen Gesetz erfolgen, identisch mit derjenigen Wärme, welche die in den Elementen stattfindenden chemischen Prozesse hervorrufen würden, wenn sie auf gewöhnlichem Wege, ohne Elektrizitätsentwickelung, vor sich gingen.

Während also als Quelle der hydroelektrischen Ströme die chemischen Prozesse zu betrachten sind, findet Helmholtz als Äquivalent der durch thermoelektrische Ströme erzeugten Kraft die von Peltier entdeckten Wirkungen solcher Ströme an den Lötstellen zweier Metalle, und zwar verlangt hier das Prinzip der Erhaltung der Kraft, daß die im Innern der Leiter entwickelte Wärme gleich ist der an den Lötstellen im ganzen absorbierten Wärme. Als Folgerung dieser An-

nahme ergibt sich unter anderem der Satz, daß die Peltiersche Wirkung an einer Lötstelle proportional der Stromstärke ist, und daß die elektrothermische Kraft der Thermokette in demselben Verhältnis wächst wie die an beiden Lötstellen zusammen von der Stromeinheit absorbierte Wärme.

Sodann behandelt Helmholtz die Kraftwirkungen des Magnetismus, und zwar in genau derselben Weise wie die der statischen Elektrizität. Die magnetische Spannkraft wird gemessen durch das analog definierte magnetische Potenzial der Magnete aufeinander und auf sich selbst, und die Zunahme dieser Größe ergibt das Wachstum an lebendiger Kraft. Hierbei wird unterschieden zwischen permanentem und durch Induktion veränderlichem Magnetismus. Im ersteren Fall, bei permanenten Stahlmagneten, ist das Potenzial des Magneten auf sich selbst konstant, kann also ganz fortgelassen werden, beim induzierten Magnetismus dagegen ist dies Potenzial veränderlich. Helmholtz beschränkt sich hierbei auf die Betrachtung solcher Körper (aus weichem Eisen), in denen der Magnetismus bis zur vollkommenen Bindung induziert ist, d. h. so, daß die magnetische Oberflächenbelegung, die ja stets an die Stelle der inneren Verteilung gesetzt werden kann, sich genau nach demselben Gesetz bildet, wie die elektrische Oberflächenverteilung in einem elektrisch induzierten, von vornherein nicht geladenen, isolierten Leiter. Diese Annahme ist bekanntlich in der Poissonschen Theorie der magnetischen Induktion als spezieller Fall enthalten.

Übergehend zu den Erscheinungen des Elektromagnetismus wird unter Zugrundelegung der von Ampère und F. Neumann entwickelten Gesetze der elektrodynamischen Wirkungen das Prinzip der Erhaltung der Kraft auf geschlossene Ströme angewendet. Wenn sich zunächst ein permanenter Magnet unter dem Einfluß eines etwa hydroelektrischen ruhenden Stromes J bewegt, so sind als Kräfteäquivalente in Rechnung zu bringen: 1) die lebendige Kraft der Bewegung des Magneten, 2) die vom Strom in seiner Leitung entwickelte

Wärme, endlich 3) die in den Elementen erzeugte chemische Arbeit. Die algebraische Summe dieser Äquivalente muß einen mit der Zeit nicht veränderlichen Wert besitzen, ihre zeitliche Änderung ist also = 0. Nun ergibt sich die im Zeitelement dt gewonnene lebendige Kraft des Magneten mit Hilfe des Potenzials des Stromes auf den Magneten: $J \cdot V$ (der Strom J nach Ampère durch eine magnetische Doppelschicht ersetzt gedacht) zu $J \cdot \frac{dV}{dt} \cdot dt$, ferner die in derselben Zeit im Stromkreis entwickelte Wärme zu $J^2 \cdot W \cdot dt$ (W Widerstand), endlich die erzeugte chemische Arbeit zu $-A \cdot J \cdot dt$ (A die elektromotorische Kraft der Elemente), also bekommen wir die Bedingung:

$$J\frac{dV}{dt}dt + J^2 W dt - AJdt = 0$$

oder:

$$J = \frac{A - \frac{dV}{dt}}{W}.$$

Durch Vergleichung mit der Ohmschen Formel folgt hieraus das Gesetz der magnetelektrischen Induktion in der Weise, daß jede Lagenänderung des Magneten in einem geschlossenen Leiter eine elektromotorische Kraft: $-\frac{dV}{dt}$ induziert, die gemessen wird durch die Geschwindigkeit der Änderung des Potenzials des Magneten auf den Leiter, letzterer von der Stromeinheit durchflossen gedacht. Dies Gesetz stimmt wesentlich mit dem von F. Neumann für die elektrische Induktion auf ganz anderem Wege abgeleiteten Prinzip überein und unterscheidet sich von diesem der Form nach nur dadurch, daß Neumann die Potenzialänderung noch mit einer unbestimmt gelassenen Konstante ϵ multiplizieren muß, um den Wert der induzierten elektromotorischen Kraft zu erhalten, während in der Helmholtzschen Ableitung diese Konstante einen bestimmten Wert erhält, der nur von den gewählten Maßeinheiten abhängt (in dem jetzt gebräuchlichen mag-

netischen Maßsystem ist sie = 1, in dem damals von Helmholtz gebrauchten = dem reziproken Wert des mechanischen Wärmeäquivalents, da er dort den Widerstand durch die Wärme mißt, die in ihm von der Stromeinheit in der Zeiteinheit hervorgebracht wird).

Die beschriebene Art der Anwendung des Prinzips der Erhaltung der Kraft führt uns zu einer prinzipiell wichtigen Überlegung. Man könnte nämlich die Frage aufwerfen, ob es denn von vorneherein gerechtfertigt ist, die verschiedenen Kraftäquivalente gerade in der Weise in Anschlag zu bringen, wie es oben geschehen ist: Lebendige Kraft des Magneten, Wärmeentwickelung im Stromkreis, chemische Arbeit. Es läge nämlich nach der Analogie mit früheren Sätzen doch die Vermutung nahe, etwa das Potenzial $J \cdot V$ des Stromes auf den Magneten auch als eine bestimmte Kraftart zu betrachten und als Glied in die Summe der verschiedenen Kraftäquivalente mit aufzunehmen, wodurch dann die Gleichung der Erhaltung der Kraft noch ein Zusatzglied: $\frac{d(J \cdot V)}{dt} \cdot dt$ erhalten würde. So gut man bei der Bewegung zweier Magnete die magnetische Spannkraft als bestimmtes Kraftäquivalent rechnet und dieselbe durch den Wert des magnetischen Potenzials mißt, so stellt sich bei den elektromagnetischen Kräften, die ja mit den magnetischen in so innigem Zusammenhang stehen, der Gedanke ein, auch eine elektromagnetische Spannkraft neben den übrigen Kraftarten als besonderes Äquivalent mit anzuführen. Dann würde die Erhaltung der Kraft allerdings zu einer Folgerung führen, die von dem oben abgeleiteten Induktionsgesetz und von der Erfahrung abweicht.

Die richtige Antwort auf die Frage kann nur so lauten, daß es in der Tat kein Mittel gibt, von vorneherein, ohne Zuhilfenahme der Erfahrung, zu entscheiden, ob das elektromagnetische Potenzial als besondere Kraftart zu betrachten ist oder nicht. (Siehe S. 43.) Nur die Tatsache, daß die

Annahme der ausgesprochenen Vermutung unter Anwendung des Gesetzes der Erhaltung der Kraft zu einem Widerspruch mit der Erfahrung führt, berechtigt uns zu dem Schluß, daß es in der Tat keine elektromagnetische Spannkraft gibt, so wie es eine magnetische gibt, wenigstens unter Festhaltung der im bisherigen gebrauchten Vorstellungen vom Magnetismus.

Daher ist auch die häufig ausgesprochene Behauptung nicht ganz richtig, daß die magnetelektrische Induktion eine unmittelbare Konsequenz des Prinzips der Erhaltung der Kraft sei. Man könnte ja z. B. von vorneherein ebensogut annehmen, daß ein Strom, der in Wechselwirkung mit einem Magneten tritt, sich diesem gegenüber ebenfalls ganz wie ein permanenter Magnet verhält. Dann würde bei einer eintretenden Bewegung die Stromstärke konstant bleiben, die chemische Arbeit würde sich vollständig in Stromwärme umsetzen, und das Prinzip der Erhaltung der Kraft würde genau ebenso befriedigt werden, wie bei der Bewegung einer konstanten magnetischen Doppelschicht, die sich in Wechselwirkung mit einem Magneten befindet. Eine geschlossene metallische Leitung würde sich dann gegen einen Magneten ebenso indifferent verhalten, wie gegen einen beliebigen unmagnetischen Körper, dagegen würde ein ruhender konstanter Magnet auf einen ruhenden veränderlichen Strom gewisse Induktionswirkungen ausüben.

Die Induktionserscheinungen können also nicht aus dem Prinzip der Erhaltung der Kraft allein, sondern nur zugleich aus der Erfahrung erschlossen werden, sie sind nicht eine Folge des Prinzips an und für sich, sondern eine Folge der weiteren Annahme, daß es keine anderen Kraftarten gibt, als die oben in Rechnung gezogenen. Aus dieser Annahme ergeben sie sich dann allerdings als numerisch vollständig bestimmt.

Von welch praktischer Bedeutung diese Erwägungen sind, zeigt sich bei der Anwendung des Prinzips auf die Wechsel-

wirkungen zweier Ströme. Hier ist die von Helmholtz gegebene Gleichung unvollständig; sie enthält nämlich als Kraftäquivalente nur die lebendige Kraft der Bewegung der Stromleiter, die in den Leitungen erzeugte Wärme und die verbrauchte chemische Arbeit, während es sich später herausgestellt hat, daß es auch ein elektrodynamisches Kraftäquivalent gibt, die jetzt so genannte elektrokinetische Energie, die gemessen wird durch das (negative) Potenzial der beiden Ströme aufeinander. Diese Größe muß zur Bildung der vollständigen Gleichung der Erhaltung der Kraft mit als Glied in die Summe der einzelnen Kraftarten eingeführt werden; dann erst wird diese Gleichung richtig. — Ebenso wie das Potenzial der Ströme aufeinander, so liefert auch das Potenzial eines Stromes auf sich selbst eine besondere Kraftart, welche genau genommen auch oben bei den elektromagnetischen Wirkungen hätte berücksichtigt werden müssen (Selbstinduktion). Eine systematische Besprechung dieser Fragen werden wir im dritten Abschnitt dieser Schrift vornehmen; hier soll nur aufs neue darauf hingewiesen werden, wie sehr es bei der Anwendung des Prinzips der Erhaltung der Kraft auf die Einführung des richtigen Kraftäquivalents für jede einzelne Erscheinung ankommt.

Ein Hinweis auf die Prozesse in der organischen Natur, soweit sie sich mit unserem Prinzip in Zusammenhang bringen lassen, insbesondere auf die Anhäufung chemischer Spannkraft bei den Pflanzen unter dem Einfluß der chemisch wirkenden Sonnenstrahlen, und auf die Wärmeproduktion des tierischen Körpers, die von uns bereits besprochen ist, sowie die Zurückweisung einiger Einwände gegen das Prinzip bildet den Schluß der Abhandlung von Helmholtz. Nach großartigem Plane angelegt und in kleinstem Raume eine Fülle von Tatsachen und Ideen umfassend, die zum Teil erst im Laufe der Jahre von andern Forschern aufgegriffen und einzeln weiter ausgebildet wurden, wird diese Schrift für immer eines der merkwürdigsten und lehrreichsten Denk-

mäler in der Geschichte der Entwicklung des Prinzips der Erhaltung der Kraft bilden.

Der Eindruck, den die Arbeit bei ihrem Erscheinen unter den Fachgenossen hervorrief, war kein bedeutender. Das neue Prinzip war damals geradezu unpopulär, es verlangte eine so radikale Umwälzung aller physikalischen Anschauungen, daß es allgemein mit Befremden und meistens ablehnend beurteilt wurde. So kam es, daß dieser später so berühmt gewordene Aufsatz zuerst gar nicht einmal in weitere Kreise gelangte (W. Thomson bekam ihn z. B. nach seiner eigenen Angabe erst im Jahre 1852 zu Gesichte); es mußten noch einige andere Anstöße hinzukommen, ehe sich der Umschwung in der allgemeinen Meinung vollzog.

Bevor wir dazu übergehen, wollen wir hier gleich der kritischen Bemerkungen von Clausius über die Abhandlung von Helmholtz Erwähnung tun, von denen der erste Teil[1]) im Jahre 1853 erschien (wo also der Sieg des Prinzips bereits entschieden war). In diesen Bemerkungen werden einerseits einige Anwendungen, die Helmholtz von dem Prinzip der Erhaltung der Kraft gemacht hatte, kritisch besprochen, so insbesondere die Art der Definition des Potenzials eines Leiters auf sich selbst (S. 46), dann die Übereinstimmung der Rießschen Versuche über die Wärmewirkungen einer elektrischen Entladung mit der Theorie, nebst der aus ihr abgeleiteten Unabhängigkeit der erzeugten Wärme von der Natur des Schließungsdrahtes, ferner die Holtzmannsche Auffassung der Äquivalenz von Wärme und Arbeit; andererseits wird Einspruch erhoben gegen den von Helmholtz aufgestellten Satz (S. 40), daß die Auflösbarkeit der Naturkräfte in Zentralkräfte (von Punkt zu Punkt wirkend in der Richtung der Verbindungslinie, mit einer Intensität, die abhängt nur von der Entfernung) eine notwendige Folge des Satzes der

1) R. Clausius: Über einige Stellen in der Schrift von Helmholtz über die Erhaltung der Kraft. Pogg. Ann. 89, p. 568, 1853.

lebendigen Kraft sei. — Auf diese Bemerkungen erwidert Helmholtz[1]) eingehend und führt insbesondere in betreff des letzterwähnten Satzes aus (immer gestützt auf die mechanische Naturanschauung), daß seine Ableitung nur von der einen Voraussetzung abhänge, daß reelle Wirkungen ihren vollständigen Grund in Verhältnissen reeller Dinge zueinander haben. Die relative Lage eines Punktes zu einem andern ist lediglich durch die Entfernung bestimmt, und daraus folgt, daß die lebendige Kraft, wenn sie nur von der Lage der Punkte abhängt, auch nur von der Entfernung abhängen kann; dies führt dann zur Annahme von Zentralkräften, näheres hierüber siehe im dritten Abschnitt. Anders ist es, wenn statt eines Punktes ein körperlich ausgedehntes unendlich kleines Element substituiert wird; hier gibt es nämlich im allgemeinen verschiedenartige Richtungen, und es ist wohl denkbar, daß die lebendige Kraft eines Punktes, der sich unter dem Einfluß eines wirkenden Elements bewegt, je nach der Richtung seiner Entfernung vom Element verschiedene Werte hat. Helmholtz weist nun aber nach, daß, wenn die lebendige Kraft des Punktes eine ganz beliebig gegebene Funktion seiner Koordinaten ist, sich stets auf unendlich mannigfaltige Weise eine Anordnung von Punkten innerhalb oder an der Oberfläche des Elements auffinden läßt, die ihrerseits einfach nach Zentralkräften wirken und die Wirkung des Elements vollständig ersetzen; auf diese Weise ist auch dieser allgemeine Fall zurückgeführt auf die Existenz von Zentralkräften. Bekanntlich machen wir von diesem Satz Gebrauch, indem wir uns z. B. die Fernewirkungen eines Elementarmagneten vorstellen als hervorgehend aus dem Zusammenwirken zweier mit einfachen Zentralkräften wirkender Pole. Zum Schluß gibt Helmholtz noch eine Vervollständigung der früher von ihm gemachten Anwendungen

1) H. Helmholtz: Erwiderung auf die Bemerkungen von Hrn. Clausius. Pogg. Ann. 91, p. 241, 1854. Wiss. Abh. I p. 76.

des Prinzips auf Magnetismus und Elektrodynamik mit Zugrundelegung der Theorie der magnetischen Induktion von Poisson und der eigenen Untersuchungen über Stromschwankungen induzierter Ströme.[1]) Hierbei wird gefunden, daß ein galvanischer Strom durch sein Bestehen an und für sich ein Kraftäquivalent repräsentiert, welches proportional ist dem Quadrat seiner Intensität (elektrodynamisches Potenzial auf sich selbst). Wird der Strom unterbrochen, so verwandelt sich dieser Kraftvorrat entweder unmittelbar in Wärme (Unterbrechungsfunke) oder erst auf indirektem Wege, durch den entstehenden Extrastrom. Auch das F. Neumannsche allgemeine Gesetz der Induktion der Magnete oder Ströme wird als übereinstimmend mit dem Prinzip der Erhaltung der Kraft erwiesen. Durch eine zweite Erwiderung von Clausius[2]) fand diese Diskussion ihren Abschluß.

Wenden wir uns nun wieder zurück zum Jahr 1847, so finden wir hier zunächst wieder eine neue Arbeit[3]) von Joule, der eine Reihe von Versuchen zur Bestimmung des mechanischen Wärmeäquivalents veröffentlichte, die sich auf die Wärmeerzeugung durch Reibung in Flüssigkeiten bezogen. Ein Schaufelrad aus Messing oder Eisen, das in eine Flüssigkeit (Wasser, Wallrathöl, Quecksilber) getaucht war, wurde durch herabfallende Gewichte in Rotation versetzt, und die durch die Reibung in der Flüssigkeit erzeugte Wärme mit der aufgewendeten Arbeit verglichen. Das Verhältnis ergab das mechanische Wärmeäquivalent im Mittel zu 430 Kilogrammeter.

---

1) H. Helmholtz: Über die Dauer und den Verlauf der durch Stromesschwankungen induzierten elektrischen Ströme. Pogg. Ann. 83, p. 505, 1851. Wiss. Abh. I p. 429.

2) R. Clausius: Über einige Stellen d. Schrift v. Helmh. üb. d. Erh. d. Kr. Zweite Notiz, Pogg. Ann. 91, p. 601, 1854.

3) Joule: On the mechanical equivalent of heat as determined by the heat evolved by the friction of fluids. Phil. Mag. (3) 31, p. 173, 1857. Pogg. Ann. 73, p. 479, 1848.

Nun verstärkte sich doch allmählich die Schar derer, welche, dem Vorgange Joules folgend, auf dem sich eröffnenden weiten Gebiete an dem Ausbau der neuen Theorie mitarbeiten halfen. Der schon oben erwähnte Séguin aîné, in seinen Anschauungen vom Wesen der Wärme bestärkt, berechnete nun auch das mechanische Wärmeäquivalent, und zwar durch die Abkühlung, welche Wasserdampf erfährt (von 180° bis 80° Cels.), wenn er bei der Ausdehnung Arbeit leistet.[1]) Das mittlere Resultat war 449 Kgrm. Ferner sind hier auch die Arbeiten von W. Grove[2]) zu nennen, der sich längere Zeit hindurch mit der Untersuchung der Gesetze der Umwandlung der verschiedenen Naturkräfte ineinander beschäftigte, wie sie sich aus der mechanischen Anschauung ergeben, und seine über dieses Thema an der Royal Institution in London gehaltenen Vorlesungen in ein, mehr populär gehaltenes, Buch[3]) über die Verwandschaft der Naturkräfte vereinigte, welches 1856 von Moigno ins Französische und später wiederholt[4]) auch ins Deutsche übersetzt wurde.

Es ist beachtenswert, daß mit der Entdeckung des mechanischen Wärmeäquivalents und der Entwickelung des allgemeinen Prinzips der Erhaltung der Energie die Ausbildung der Ansicht, daß alle Naturerscheinungen auf Bewegung beruhen, so unmittelbar Hand in Hand ging und sogar oft geradezu identifiziert wurde. Denn streng genommen lehrt das Prinzip doch nichts als die Verwandelbarkeit der einzelnen Naturkräfte ineinander nach festen Verhältnissen, gibt aber durchaus keinen Aufschluß über die Art, wie

---

1) Séguin aîné: Note à l'appui de l'opinion émise par M. Joule, sur l'identité du mouvement et du calorique. Compt. Rend. 25, p. 420, 1847.

2) W. Grove: Résumé de quelques leçons sur les rapports des divers agents ou forces physiques. L'Institut Nr. 750—753, 1848.

3) W. Grove: The correlation of physical forces. 3. Aufl. 1855.

4) W. Grove: Die Verwandschaft der Naturkräfte, deutsch von E. v. Rußdorf, Berlin 1863, von Schaper, Braunschweig 1871.

diese Umwandlung zustande kommt. Aus der Gültigkeit des Prinzips läßt sich also keineswegs die Notwendigkeit der mechanischen Naturanschauung deduzieren, während umgekehrt sich das Prinzip allerdings als eine notwendige Folge dieser Anschauung herausstellt, wenigstens wenn man dabei von Zentralkräften (S. 40) ausgeht. Dieser letztere Umstand in Verbindung mit dem Bedürfnis, sich eine einheitliche Vorstellung von der Wirkungsweise der Naturkräfte zu bilden, erklärt hinreichend die Tatsache der so schnell und widerspruchslos erfolgten Annahme der mechanischen Theorie, die sich bisher in der Tat überall glänzend bestätigt hat; wenigstens glaube ich zurzeit nicht die Befürchtungen teilen zu sollen, welche an die allgemeine Durchführbarkeit dieser Theorie, als einer allzu engherzigen Auffassung der Naturerscheinungen, geknüpft werden.[1])

Während die Arbeiten Joules sich so allmählich, besonders in Deutschland, zur verdienten Anerkennung durchrangen und sogar die Prioritätsstreitigkeiten (zwischen Mayer,[2]) Joule, Séguin,[3]) Colding[4])) bereits ihren Anfang nahmen, verhielten sich die bedeutenderen Physiker Englands der neuen Theorie gegenüber noch eine Zeitlang zurückhaltend. W. Thomson macht allerdings in einer Mitteilung[5]) an die

---

1) E. Mach: Die Geschichte und die Wurzel des Satzes von der Erhaltung der Arbeit. Prag 1872. Calve.

2) R. Mayer: Sur la transformation de la force vive en chaleur et réciproquement. Compt. Rend. 27, p. 385, 1848 etc.

3) Séguin aîné: Note à l'appui de l'opinion émise par M. Joule, sur l'identité du mouvement et du calorique. Compt. Rend. 25, p. 420, 1847.

4) A. Colding: Det kongel. danske vidensk. selsk. naturv. og math. afh. (5) II, 1843 p. 121, 167.

On the history of the principle of the conservation of energy, Phil. Mag. (4) 27, p. 56, 1864.

5) W. Thomson: Report of the 18. Meeting of the British Association for the adv. of sc. Notices and abstr. of communic. p. 9, 1848. On the theory of electromagnetic induction.

British Association vom Jahre 1848: über die Theorie der elektromagnetischen Induktion, auf den engen Zusammenhang aufmerksam, welcher besteht zwischen der auf die Bewegung des induzierenden Magneten verwandten Arbeit (work) und der Intensität des durch diese Bewegung hervorgerufenen Stromes, aber er bleibt bei der Annahme stehen, daß durch den induzierten Strom mechanischer Effekt von bestimmtem Betrage verloren wird, ohne weiter nach dem Ersatz dieses Verlustes zu fragen. Nichtsdestoweniger erkannte er die Wichtigkeit und Fruchtbarkeit des Satzes, daß es unmöglich ist, Arbeit aus Nichts zu gewinnen, so klar, daß er daran ging, die Carnotsche Theorie, die ja auf demselben Gedanken beruht, von neuem aufzunehmen und unter Benutzung der neuesten Beobachtungsdaten, namentlich von Regnault, zur Anwendung auf die bewegende Kraft von Wärmemaschinen tauglich zu machen.[1]) Der Schwierigkeiten, die ihm dabei aufstießen, haben wir schon oben (S. 19) gedacht; jedenfalls hielt er deren Überwindung auf dem eingeschlagenen Wege nicht für unmöglich. Da übrigens die alte Carnotsche Theorie doch zum Teil auf einer richtigen Grundlage beruht, so zeigten sich manche Folgerungen derselben mit der Erfahrung in Übereinstimmung, so z. B. der von J. Thomson gezogene[2]) und nachher von W. Thomson experimentell bestätigte[3]) Schluß, daß äußerer Druck den Gefrierpunkt des Wassers erniedrigt.

Unterdessen hatte Joule seine Arbeiten mit eiserner Ausdauer und immer exakteren Methoden fortgesetzt. War es ihm

1) W. Thomson: An account of Carnots theory of the motive power of heat. Transact. of the Roy. Soc. of Edinburgh, vol. XVI p. 541, 1849.

2) J. Thomson: Theoretical considerations on the effect of pressure in lowering the freezing-point of water. Trans. Roy. Soc. Edinburgh XVI, p. 575, 1849.

3) W. Thomson: The effect of pressure in lowering the freezing-point of water experimentally demonstrated. Phil. Mag. (3) 37, p. 123, 1850. Pogg. Ann. 81, p. 163, 1850.

früher in erster Linie darum zu tun gewesen, die Existenz des mechanischen Wärmeäquivalents, also die Konstanz der Verhältniszahl zwischen Wärme und Arbeit, in den verschiedensten Umwandlungsprozessen nachzuweisen, so ging er jetzt darauf aus, gestützt auf seine vielseitigen Erfahrungen, den möglichst genauen Wert dieses Äquivalents zu ermitteln. Unter allen früher von ihm benutzten Methoden wählte er als die zuverlässigste aus die Erzeugung von Wärme durch Bewegung eines Schaufelrades in Wasser oder Quecksilber, sowie durch Reibung gußeiserner Scheiben aneinander, und bestimmte so, unter möglichster Berücksichtigung aller erdenkbarer Fehlerquellen, aus zahlreichen Versuchen das mechanische Äquivalent der Wärmeeinheit, letzteres bezogen auf englische Pfund und F. Grade des Quecksilberthermometers, zu 772 Fußpfund, oder — die Wärmeeinheit bezogen auf Kgr. und C. Grade — zu 423,55 Kilogrammeter,[1]) eine Zahl, die bei Berücksichtigung der ihr zugrunde liegenden Einheiten auch heute noch als einer der zuverlässigsten Werte dieser wichtigen Konstanten angesehen werden kann (vgl. unten im dritten Abschnitt).

Wenn so der Satz von der Äquivalenz der Arbeit und Wärme gleichmäßig mit dem Fortschreiten der Arbeiten Joules immer mehr an Ansehen gewann, so war doch bisher noch von keiner Seite der Versuch gemacht worden, diesen Satz zur Grundlage einer ausführlichen Wärmetheorie, wie die Carnotsche war, zu machen. Rudolph Clausius war es vorbehalten, die Wissenschaft mit einer solchen Theorie zu bereichern.

Nachdem er noch in einer kurz vorher erschienenen Arbeit[2]) der Annahme gefolgt war, daß die Wärme ein unzerstörbarer Stoff sei, veröffentlichte Clausius im Jahre 1850

1) J. P. Joule: On the mechanical equivalent of heat. Phil. Trans. London 1850, p. 61.

2) Clausius: Über die Veränderungen, welche in den bisher gebräuchlichen Formeln für das Gleichgewicht und die Bewegung

in den Annalen der Physik von Poggendorff eine Abhandlung[1]) über die bewegende Kraft der Wärme, in welcher er, in Übereinstimmung mit den Ideen, welche sich vereinzelt in den Schriften von Helmholtz und Joule finden, den Grundgedanken der Äquivalenz von Wärme und Arbeit zur weiteren Ausbildung brachte. Diesen Grundgedanken spricht er in folgendem Satz aus: „In allen Fällen, wo durch Wärme Arbeit entsteht, wird eine der erzeugten Arbeit proportionale Wärmemenge verbraucht, und umgekehrt wird durch Verbrauch einer ebenso großen Arbeit dieselbe Wärmemenge erzeugt." Hierdurch ist der Gegensatz zur Carnotschen Theorie präzisiert und eine Reihe Carnotscher Begriffe umgestoßen. Wenn ein Körper einen Kreisprozeß durchmacht und schließlich wieder in seinen alten, durch Temperatur und Dichtigkeit bestimmten Anfangszustand zurückgekehrt ist, so müßte nach Carnot die Gesamtsumme der im Laufe des Prozesses von außen aufgenommenen Wärmemengen gleich der der abgegebenen sein, einerlei, welche äußere Arbeit der Körper dabei im ganzen geleistet hat. Daraus folgte dann, daß ein Körper, um von einem bestimmten, nach Willkür fixierten Nullzustand in einen bestimmten anderen zu gelangen, im ganzen eine bestimmte Wärmemenge von außen aufnehmen muß, ganz unabhängig von dem Wege, auf dem die Überführung stattfindet. Diese Wärmemenge nannte Carnot die Gesamtwärme des Körpers in dem betreffenden Zustand. Clausius zeigte nun, daß in der neuen Theorie dieser Begriff der Gesamtwärme nicht mehr zulässig sei; denn die Wärmemenge, die ein Körper von außen, durch Leitung oder

---

elastischer fester Körper durch neuere Beobachtungen notwendig geworden sind. Pogg. Ann. 76, p. 46, 1849.

1) Clausius: Über die bewegende Kraft der Wärme und die Gesetze, welche sich daraus für die Wärmelehre selbst ableiten lassen. Pogg. Ann. 79, p. 368, 500, 1850; vgl. auch: R. Clausius, Abhandl. üb. d. mechanische Wärmetheorie. 1. Aufl. Braunschw. 1864, 2. umg. Aufl. Braunschw. 1876.

Strahlung, aufnehmen muß, um von einem Zustand in einen andern zu gelangen, hängt wesentlich mit ab von der äußeren Arbeit, die er bei der Überführung leistet, also von dem Wege der Überführung. Leider hat die Clausiussche Bezeichnung „Gesamtwärme" zu einem Mißverständnis Anlaß gegeben, indem andere Physiker diesen Namen einer anderen Größe beilegten, die ihrerseits wirklich nur von dem augenblicklichen Zustand abhängt. Wie schon oben (S. 45) erwähnt, bezeichnete nämlich Helmholtz mit dem Namen: „Quantität der in einem Körper enthaltenen Wärme" die Summe der in ihm enthaltenen lebendigen Kräfte und Spannkräfte, und diese Größe ist natürlich nur von dem augenblicklichen Zustand abhängig, einerlei welche speziellere Vorstellung man sich von der gegenseitigen Wirkungsweise der kleinsten Teilchen des Körpers bildet, weil sie ja den im Körper enthaltenen Kraftvorrat repräsentiert. Für diese letztere Größe hat Clausius später[1]) den von W. Thomson gebrauchten und jetzt allgemein durchgeführten Ausdruck „innere Energie des Körpers" angenommen, während sich in der gegenwärtig zu besprechenden Abhandlung noch keine besondere Bezeichnung für sie findet. Vielmehr zerlegt Clausius den ganzen Kraftvorrat ebenso wie Helmholtz in zwei Teile: Die freie Wärme (Summe der lebendigen Kräfte) und die innere Arbeit (Summe der Spannkräfte). Jede dieser Größen für sich ist eine bestimmte Funktion des Zustandes. Der alte Begriff der latenten Wärme wird hierdurch natürlich aufgehoben: Wenn Wärme keine Temperaturerhöhung hervorbringt, wird sie nicht latent, sondern verschwindet überhaupt, da sie in Arbeit (Werk) verwandelt wird.

Zur Aufstellung der Grundgleichungen der Theorie benutzt Clausius die Clapeyronsche Methode der Kreisprozesse und wendet dieselbe auf permanente Gase und gesättigte

---

1) R. Clausius: Abh. üb. d. mech. W. 1. Aufl. I. p. 281, 1864. 2. Aufl. I. p. 33, 1876.

Dämpfe an. Dabei führt er bereits die später so sehr ins einzelne entwickelte Annahme ein, daß die Regelmäßigkeit, welche sich in dem Verhalten aller permanenten Gase gegen Druck- und Temperaturänderungen durch die Gesetze von Mariotte und Gay Lussac ausspricht, ihren Grund hat in einer übereinstimmenden Konstitution dieser Gase. In ihnen ist der Verband der Moleküle so gelockert, daß bei einer Ausdehnung des Gases gar keine innere Arbeit geleistet wird (Mayers Hypothese, S. 26) und also der ganze innere Kraftvorrat, insofern er veränderlich ist, sich auf die freie Wärme (lebendige Kraft) reduziert. Dann wird also alle äußere Arbeit lediglich auf Kosten der Wärme des Gases geleistet. Man sieht, daß diese Vorstellung direkt zur modernen Gastheorie hinüberleitet. Diesen Annahmen fügt Clausius noch die weitere hinzu, daß die spezifische Wärme bei konstantem Volumen eines permanenten Gases konstant (unabhängig von der Temperatur) ist, und gelangt so zu verschiedenen Sätzen über die spezifischen Wärmen, die zum Teil völlig neu, zum Teil schon durch Experimente bestätigt erscheinen. Auch die Gesetze der Ausdehnung unter bestimmten äußeren Bedingungen: bei konstanter Temperatur, bei konstantem Druck, sowie bei Verhinderung der Wärmezufuhr von außen werden, in wesentlicher Übereinstimmung mit der Erfahrung, abgeleitet.

Der zweite Teil der Abhandlung enthält eine wesentliche Erweiterung der Theorie durch Hereinziehung des Carnotschen Prinzips der Arbeitsleistung durch Übergang der Wärme von höherer in tiefere Temperatur. Clausius findet, daß dies Prinzip, wenn es auch in der ursprünglichen Fassung den Grundsätzen der mechanischen Wärmetheorie geradezu widerspricht, doch einen richtigen und sehr wertvollen Gedanken enthält, der nur in die geeignete Form gebracht werden muß, um auch in der neuen Theorie eine wichtige Rolle zu spielen. Dieser Gedanke besagt im wesentlichen, daß, wenn durch einen Kreisprozeß Wärme in mecha-

nische Arbeit verwandelt wird, mit der Arbeitsgewinnung notwendig ein Übergang einer gewissen andern Wärmemenge aus höherer in tiefere Temperatur verbunden ist. Die Wärme hat nämlich das Bestreben, aus höherer Temperatur in tiefere überzugehen, und dies Bestreben kann zur Gewinnung von Arbeit (Verwandlung von Wärme in Arbeit) nutzbar gemacht werden, wobei aber ein bestimmtes Maximum der zu gewinnenden Arbeit existiert, das nur abhängig ist von den Temperaturen, zwischen denen die Wärme übergeht, nicht aber von der Natur der betreffenden Körper. Um eine Veränderung der Wärme in entgegengesetzter Richtung: Übergang von tieferer in höhere Temperatur zu veranlassen, bedarf es immer eines gewissen Arbeitsaufwandes (Verwandlung von Arbeit in Wärme), welcher mindestens so groß ist, wie die durch den umgekehrten Vorgang im Maximum zu gewinnende Arbeit. — In dieser Modifizierung bildet das Carnotsche Prinzip, dessen weitere Ausbildung Clausius später zu seinem zweiten Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie geführt hat, keinen Gegensatz, sondern eine Ergänzung zum Prinzip der Äquivalenz von Wärme und Arbeit, da es die Bedingungen der gegenseitigen Verwandelbarkeit äquivalenter Kraftarten regelt. Von hier ab trennen sich in der weiteren Entwickelung der Wärmetheorie diese beiden Prinzipien, die in der Tat in keinem logischen Konnex miteinander stehen,[1]) scharf voneinander, und wir werden uns daher in dieser Schrift von jetzt an nur mehr mit der Darstellung desjenigen von ihnen zu beschäftigen haben, das sich unmittelbar an den allgemeinen Satz der Erhaltung der Energie anschließt.

Den Schluß von Clausius' Abhandlung bildet eine Darstellung verschiedener Methoden zur Berechnung des mecha-

1) [Anm. 1908. Nach den Untersuchungen von L. Boltzmann, deren Resultate sich in der Folge auf verschiedenen Gebieten bewährt haben, ist der zweite Hauptsatz der Wärmetheorie seinem Wesen nach ein Wahrscheinlichkeitssatz.]

nischen Wärmeäquivalents, wobei auch der Versuche Joules gedacht wird; als wahrscheinlichster Wert wird schließlich eine Zahl angenommen, die etwas über 400 Kgrm. beträgt. — Man darf wohl nicht mit Unrecht die Zeitperiode, in der die mechanische Theorie der Wärme das Übergewicht errang, von dieser epochemachenden Abhandlung datieren.

Fast gleichzeitig[1]) mit Clausius begann W. J. M. Rankine die Wärmetheorie von dem neuen mechanischen Standpunkt aus zu bearbeiten (wir übergehen hier die Versuche, eine mechanische Wärmetheorie zu begründen, insofern sie keine bemerkenswerte Durchführung erhalten haben, wie die von Buys-Ballot,[2]) von Wilhelmy[3]) u. a.). Rankine[4]) begnügte sich aber nicht, wie Clausius, mit der einfachen Voraussetzung der gegenseitigen Verwandelbarkeit von Wärme und Arbeit, sondern fügte noch eine Reihe speziellerer Vorstellungen über die besondere Natur der Bewegung hinzu, die wir als Wärme wahrnehmen. Die Wärmebewegung besteht nach ihm in einer heftigen Wirbelbewegung der die körperlichen Atome umgebenden Atmosphären, deren lebendige Kraft die Quantität der vorhandenen Wärme ausmacht. Wird einem Körper von außen Wärme zugeführt, so wird nur ein Teil derselben zur Vergrößerung dieser lebendigen Kraft verwendet (wahre spezifische Wärme), der Rest dient dazu, die Anordnung der Atome zu verändern. Wir haben also auch hier, wie bei Clausius, die Unterscheidung zwischen freier Wärme

1) W. J. M. Rankine: Über die mechanische Theorie der Wärme, Pogg. Ann. 81, p. 172, 1850. (Brief.) Phil. Mag. (4) 2, p. 61, 1851.
On the centrifugal theory of elasticity, as applied to gases and vapours. Phil. Mag. (4) 2, p. 509, 1851.

2) Buys-Ballot: Schets eener physiologie van het onbewerktuigde ryk der natuur. Utrecht 1849.

3) L. Wilhelmy: Versuch einer mathematisch-physikalischen Wärmetheorie. Heidelberg 1851.

4) M. Rankine: On the mechanical action of heat. Trans. Roy. Soc. Edinburgh (geles. Febr. 4 1850) vol. XX p. 147, 191, 195, 205, 425, 441, 565, 1853.

und innerer Arbeit. Doch läßt sich unmittelbar einsehen, daß die Clausiusschen Untersuchungen auf einer zuverlässigeren Basis beruhen, weil sie eben nur die strengen Folgerungen des Prinzips der Äquivalenz von Wärme und Arbeit, und nicht die mindeste willkürliche Voraussetzung über die Natur der Wärme enthalten. Da wir überdies bei unserer Darstellung uns von Molekularhypothesen möglichst unabhängig halten wollen, so haben wir hier keine Veranlassung, näher auf die Vorstellungen Rankines einzugehen.

Um dieselbe Zeit wurde auch William Thomson durch Untersuchungen über galvanische Prozesse veranlaßt, in die Reihe der Vorkämpfer für die mechanische Theorie überzutreten, und hat von da an in einer ansehnlichen Reihe von Abhandlungen, welche die verschiedensten Anwendungen des neuen Prinzips enthalten, für die Entwickelung der Theorie in ähnlicher Weise gewirkt, wie Joule es auf experimentellem Wege für die Feststellung der Existenz und des Zahlenwertes des mechanischen Wärmeäquivalents getan hat.

In seiner ersten hierauf bezüglichen Schrift[1]) geht Thomson von dem Grundsatz aus, daß der Strom einer magnetelektrischen Maschine im ganzen Schließungskreis eine Wärmemenge erzeugt, die äquivalent ist der zur Erzeugung des Stromes verwendeten Arbeit; wenn aber durch denselben Strom zugleich elektrolytische Wirkungen hervorgebracht werden, so ist die erzeugte Wärme kleiner, und zwar um den Betrag derjenigen Wärme, die durch die Wiedervereinigung der zersetzten Stoffe entstehen würde. Die letztere Wärme nennt Thomson daher das Wärmeäquivalent der stattgehabten chemischen Wirkung. Dieser Grundsatz wird angewandt auf die Ströme, welche durch mechanische Drehung einer kreisrunden Metallscheibe unter dem induzierenden Einfluß des Erdmagnetismus entstehen. Man kann durch passendes An-

---

1) W. Thomson: On the mechanical theory of electrolysis. Phil. Mag. (4) 2, p. 429, 1851.

legen von Drähten an die Scheibe einen Strom in den Drähten erhalten, der auch chemische Zersetzungen bewirkt, und ist dann imstande, die Richtigkeit des obigen Satzes zu prüfen. Aus ihm leitet Thomson in ähnlicher Weise wie Helmholtz (S. 47) die Folgerung ab, daß die elektromotorische Kraft eines galvanischen Elements im absoluten Maße gleich ist dem mechanischen Äquivalent der chemischen Wirkung, welche in ihm von der Einheit des Stromes in der Einheit der Zeit hervorgebracht wird.

In einem folgenden Aufsatz[1]) wird die von einem Strom in einem Leiter entwickelte Wärme dazu benutzt, um den Widerstand dieses Leiters in absolutem magnetischen Maße zu messen. Dividiert man nämlich den in Kalorien gemessenen Betrag der in der Zeiteinheit entwickelten Wärme mit dem mechanischen Wärmeäquivalent, so erhält man die Stromwärme $J^2 \cdot W$ im mechanischen Maße, und diese Größe noch durch das Quadrat der im magnetischen Maße gemessenen Stromintensität J dividiert ergibt den Ausdruck für den Widerstand W des Leiters in absolutem Maße. Die Einheit des Widerstandes ist dann dadurch bezeichnet, daß in ihr der Strom 1 in der Zeit 1 eine der mechanischen Arbeit 1 gleiche Wärme entwickelt. Die für den spezifischen Widerstand von Silber und Quecksilber ausgeführte Berechnung ergab Resultate, welche gut mit denen übereinstimmen, die von W. Weber auf ganz anderem Wege gefunden waren. Dieser hatte seine Definition des Widerstandes darauf gegründet,[2]) daß er die Neumannsche Induktionskonstante ϵ (S. 50) gleich 1 setzte. Beide Definitionen führen also zu übereinstimmenden Werten des Widerstandes, wie es auch nach der theoretischen Ab-

1) W. Thomson: Applications of the principle of mechanical effect to the measurement of electro-motive forces and of galvanic resistances in absolute units. Phil. Mag. (4) 2, p. 551, 1851.

2) W. Weber: Electrodynamische Maßbestimmungen, insbesondere Widerstandsmessungen. Abh. d. Leipz. Akad. I p. 197. Pogg. Ann. 82, p. 337, 1851.

leitung des Induktionsgesetzes von Helmholtz der Fall sein muß.

Die nämliche Abhandlung enthält noch Anwendungen des oben erwähnten Satzes von der Gleichheit der auf galvanischem und der auf gewöhnlichem chemischen Wege erzeugten Wärme. Tritt die galvanische Wärme lediglich als Joulesche (Lenzsche) Wärme auf, d. h. ist sie überall proportional dem Quadrat der Stromintensität, so ist die elektromotorische Kraft E, wie schon oben erwähnt, gleich der, auf die Stromeinheit und Zeiteinheit reduzierten, chemischen Wärmetönung A im Element. Denn dann folgt aus der Äquivalenz der thermischen Wirkung: $J^2 \cdot W$ und der chemischen Wirkung: $J \cdot A$:

$$A = J \cdot W \text{ und nach dem Ohmschen Gesetz} = E.$$

Diese Annahme findet Thomson bestätigt für das Daniellsche Element, wobei er die Andrewsschen Zahlen der Wärmetönung der in diesem Element stattfindenden Prozesse benutzt. Es ist aber auch sehr wohl denkbar — und bemerkenswerter Weise macht Thomson schon hier auf diesen Fall ausdrücklich aufmerksam —, daß die den chemischen Prozessen entsprechende Wärme nicht lediglich als Joulesche Wärme zum Vorschein kommt, d. h. nicht vollständig in Stromarbeit umgesetzt wird, sondern daß ein Teil derselben als lokale oder sekundäre Wärme auftritt, besonders an der Grenze zweier Leiter. Diese lokale Wärme kann einem ganz anderen Gesetze als dem Jouleschen folgen, sie kann namentlich der einfachen Stromintensität proportional sein und also auch negativ werden. Dann wird die elektromotorische Kraft E des Elementes um einen der erzeugten lokalen Wärme entsprechenden Betrag vermindert werden. Ist nämlich diese letztere Wärme etwa gleich $J \cdot C$, so haben wir, wenn wir wieder nach dem Energieprinzip die Gesamtwärme gleich der durch die chemischen Prozesse zu erzeugenden setzen:

$$J^2 \cdot W + J \cdot C = A \cdot J,$$

woraus folgt:

$$J \cdot W (= E) = A - C,$$

Thomson führt hier die von Faraday[1]) ausgesprochene Ansicht an, der auch Joule beipflichtete, daß beim Daniellschen Element nur die Prozesse der Oxydation von Zink und der Reduktion von Kupferoxyd elektromotorisch wirksam seien, daß dagegen die Wärmetönung, welche der Auflösung des Zinkoxyd in der Schwefelsäure und der Ausscheidung von Kupferoxyd aus dem Kupfervitriol entspricht, als besondere lokale Wärme (an der Anode positiv, an der Kathode negativ) unabhängig von der Stromerregung zum Vorschein komme. Daß im allgemeinen eine solche lokale Wärmeerzeugung vorhanden ist, folgt auch aus dem Verhalten der Smeeschen Säule (Platiniertes Silber, Schwefelsäure, Zink), deren elektromotorische Kraft kleiner ist als die aus der chemischen Wärmetönung berechnete. Hier muß also eine lokale Wärmeentwickelung auftreten, welche dem Überschuß der chemischen Arbeit über die Joulesche Wärme äquivalent ist.

Das Jahr 1851 brachte noch eine Publikation von Joule,[2]) die zwar anfangs wenig beachtet wurde, später aber die Grundlage eines neuen Zweiges der Physik geworden ist, der modernen Gastheorie. Ausgehend von der Vorstellung, daß die Wärme eines Gases in der lebendigen Kraft der Bewegung der kleinsten Körperteilchen bestehe, faßte Joule diese Bewegung nicht, wie Davy und später Rankine, als in Vibrationen und Rotationen bestehend auf, sondern dachte sich, in Übereinstimmung mit Ideen von Daniel Bernoulli[3]) und Herapath,[4]) die Gasmoleküle frei umherfliegen und durch

1) M. Faraday: Exp. Res. Phil. Trans. London 1834 Apr., §919.

2) J. P. Joule: Some remarks on heat and the constitution of elastic fluids. Mem. of the Phil. Soc. of Manchester (geles. Oct. 3, 1848) (2) vol. IX p. 107, 1851. Phil. Mag. (4) 14, p. 211, 1857.

3) Daniel Bernoullis Ansicht über die Konstitution der Gase. Pogg. Ann. 107, p. 490, 1859.

4) Herapath: On the dynamical theory of airs. Athen. 1, p. 722, 1860.

ihr beständiges Anprallen an die einschließenden Gefäßwände die Kraft hervorrufen, die als der Druck des Gases wahrgenommen wird. Ein einzelnes Molekül bewegt sich also in gerader Richtung mit konstanter Geschwindigkeit, bis es entweder an ein anderes Molekül oder an die Gefäßwand stößt und hier den Stoßgesetzen vollkommen elastischer Körper folgt. Diese einfache Annahme ermöglicht zugleich auch Zahlenwerte aufzustellen für die mittlere Geschwindigkeit eines Moleküls. Joule erleichterte sich die Rechnung dadurch, daß er sich das Gas in einem hohlen Würfel befindlich und jedes Molekül mit der nämlichen Geschwindigkeit in einer der drei Kantenrichtungen sich bewegend vorstellte. Daraus ergab sich die Gültigkeit des Gesetzes von Boyle-Mariotte, sowie die Proportionalität von Wärmeinhalt (gesamte lebendige Kraft), Temperatur (lebendige Kraft eines einzelnen Moleküls) und Druck. Für die Geschwindigkeit eines Wasserstoffmoleküls bei 60° F. und 30 Zoll Quecksilber ergab sich der Wert von 6225 engl. Fuß per Sekunde. Für verschiedene Gase folgte der Satz, daß gleiche Volumina bei gleichem Druck die nämliche lebendige Kraft enthalten.

Eine vorläufig nicht zu überwindende Schwierigkeit erwuchs für Joule aus der Annahme, daß die Moleküle als einfache materielle Punkte anzusehen seien, daß also der gesamte Wärmeinhalt, die gesamte lebendige Kraft eines Gases, lediglich von der fortschreitenden Bewegung der Moleküle herstamme. Bildet man nämlich unter Zugrundelegung der oben berechneten Geschwindigkeit den Ausdruck für die lebendige Kraft der fortschreitenden Bewegung aller Moleküle, so würde dieselbe durch Division mit dem mechanischen Wärmeäquivalent die in dem Gas enthaltene Wärme in Kalorien ergeben und man könnte daraus die spezifische Wärme des Gases bei konstantem Volumen berechnen.

Joule fand nun die so berechnete spezifische Wärme beträchtlich kleiner als die in Wirklichkeit beobachtete, und vermochte für diesen Umstand keine befriedigende Erklärung

aufzufinden. Eine solche nebst der entsprechenden Modifikation der Theorie ist erst später von Clausius gegeben worden.

Im wesentlichen wiederholt und zum Teil noch etwas weiter ausgeführt finden sich die Jouleschen Vorstellungen von der Natur der Gase in einer Mitteilung, die J. J. Waterston[1]) in dem nämlichen Jahr der British Association vorlegte. Anfangs ganz unbeachtet wurden diese Ideen später, als der Boden für sie günstiger zu werden begann, wieder hervorgesucht und haben sich, noch unterstützt durch die ihnen entgegenkommenden Anschauungen der Chemiker, verhältnismäßig schnell zu allgemeiner Anerkennung durchgerungen. Jedenfalls verdient die Theorie der Wärme erst von hier ab den Namen einer mechanischen, da ja durch die bloße Verwandlungsfähigkeit in Arbeit noch nichts über die Natur der Wärme ausgesagt ist.

Kehren wir nun zurück zur Betrachtung der weiteren Entwickelung des Satzes von der Erhaltung der Energie. Nachdem einmal die allgemeine Gültigkeit dieses Prinzips und dessen eminente Fruchtbarkeit an einer hinreichenden Zahl von Fällen konstatiert worden war, häufte sich schnell nacheinander die Reihe der Anwendungen und Erweiterungen, und das Interesse dafür drang in immer weitere und weitere Kreise. Jedes Jahr brachte nun eine stattliche Anzahl neuer Errungenschaften auf diesem Gebiet. Zunächst arbeitete W. Thomson[2]) in ganz ähnlicher Weise wie Clausius eine dynamische Wärmetheorie aus, indem er nun endgültig mit der alten Carnotschen Auffassung brach. Zugrunde legte er die Vorstellung, daß die Wärme auf Bewegung beruht, daß also die von ihr geleistete Arbeit einen entsprechenden Aufwand von lebendiger Kraft der schwingenden Moleküle

1) J. J. Waterston: On a general theory of gases. Rep. of the 21. Meeting of the Brit. Ass. 1851, Notices und abstracts p. 6.

2) W. Thomson: On the dynamical theory of heat. Phil. Mag. (4) 4, p. 8, 105, 168, 424, 1852.

und etwaiger innerer Arbeit erheischt. Zugleich führte er auch das modifizierte Carnotsche Prinzip mit seinen Anwendungen auf umkehrbare Prozesse in seine Theorie ein. In dieser Abhandlung findet sich zum erstenmal die Definition der in einem Körper enthaltenen mechanischen Energie in jener allgemeinen Bedeutung, wie wir sie jetzt anzuwenden pflegen. Bekanntlich hängt die Wärme, die einem Körper von außen mitgeteilt werden muß, damit er von einem bestimmten Nullzustand in einen anderen bestimmten Zustand gelange, wesentlich ab von der äußeren mechanischen Arbeit, die der Körper bei diesem Übergang leistet; je größer diese ist, desto mehr Wärme wird auch der Körper von außen aufnehmen müssen (S. 61). Subtrahiert man aber den Betrag der geleisteten Arbeit von dem der mitgeteilten Wärme (mechanisch gemessen), so erhält man immer die nämliche Größe, welches auch der Weg der Überführung sein möge. Diese Größe nennt Thomson die mechanische Energie des Körpers in dem angenommenen Zustand, sie ist vollständig bestimmt durch den Zustand selber, bis auf eine additive Konstante, die von dem gewählten Nullzustand abhängt. Wie man sieht, ist dies ganz dieselbe Funktion, die von Helmholtz (S. 45) als Quantität der gesamten Wärme (Summe der inneren lebendigen Kräfte und Spannkräfte) des Körpers bezeichnet wurde. Die Thomsonsche Form der Definition hat aber den Vorteil für sich voraus, daß sich mit ihrer Hilfe unmittelbar eine numerische Bestimmung des Wertes der Funktion ausgeführt denken läßt. — Noch eingehender werden die Eigenschaften und die Mittel zur Berechnung der Energie eines Körpers besprochen in einer weiteren Abhandlung[1]) von Thomson, in der ausgeführt wird, daß der

1) W. Thomson: On the quantities of mechanical energy contained in a fluid mass, in different states, as to temperature and density. Phil. Trans. Edinburgh (gelesen Dec. 3, 1851) vol. XX p. 475, 1853. Phil. Mag. (4) 3, p. 529, 1852; ausführlicher: Phil. Mag. (4) 9, p. 523, 1855.

Totalbetrag des mechanischen Effektes (Algebraische Summe von Wärme und Arbeit), den ein Körper beim Übergang von einem Zustand in einen anderen nach außen abgibt, nur abhängig ist von diesen beiden Zuständen, nicht aber von der Art des Überganges. Die mechanische Energie gibt also denjenigen Totaleffekt an, der erhalten wird, wenn der Körper aus seinem Zustand in den (beliebig gewählten) Nullzustand übergeht. Der absolute Nullzustand wäre ein solcher, von welchem ausgehend der Körper gar keinen positiven Effekt, also weder Wärme noch Arbeit mehr produzieren könnte; derselbe ist aber unseren Mitteln unerreichbar. Wie schon oben bemerkt, ist die Thomsonsche Bezeichnung Energie zunächst von Clausius adoptiert und dann nach und nach allgemein gebräuchlich geworden.

Diesen theoretischen Arbeiten Thomsons über die mechanischen Leistungen der Wärme schloß sich als Anwendung der Theorie eine Untersuchung an über die Wirkungen der strahlenden Wärme und des Lichtes, sowie über die Kraftquellen, die der Menschheit von der Natur dargeboten werden.[1]) Licht und strahlende Wärme werden hierbei identifiziert, die Bedeutung des Sonnenlichtes für die Assimilation der Pflanzen und dadurch für das Atmen der Tiere (vgl. R. Mayer S. 28) gewürdigt und auf der Erde im ganzen drei Hauptquellen der Arbeit unterschieden: vornehmlich die Strahlung der Sonne, dann in zweiter Linie die relative Bewegung von Erde, Sonne und Mond (Gezeiten), endlich in geringerem Maße auch irdische Kraftquellen.

Die weitere Frage nach dem Ursprung und der beständigen Wiederersetzung der ausgestrahlten Sonnenwärme

---

1) W. Thomson: On the mechanical action of radiant heat or light; on the power of animated creatures over matter on the sources available to man for the production of mechanica effect. Phil. Mag. (4) 4, p. 256, 1852.

wurde in einem Aufsatz von J. J. Waterston[1]) behandelt, welcher eine Berechnung der Wärme anstellte, die ein Körper beim Fall auf die Erde oder Sonne aus unendlicher Entfernung durch die dabei gewonnene lebendige Kraft hervorbringt. Auf Grund dieser Rechnung schloß Waterston ähnlich wie vor ihm schon Mayer (S. 28), daß die Deckung der von der Sonne verausgabten Wärme auf Kosten der Arbeit der Newtonschen Gravitationskräfte erfolge, sei es durch das Hineinfallen kosmischer Massen in die Sonne, sei es durch die beständig noch fortschreitende Verdichtung des Sonnenkörpers selber. Den ersteren Gedanken hat später W. Thomson, den letzteren Helmholtz weiter entwickelt.

Aus dieser Zeit findet sich auch schon der Versuch einer auf das Prinzip der Erhaltung der lebendigen Kräfte gegründeten Theorie der Wechselwirkung zwischen den Schwingungen des Äthers und denen der ponderabeln Moleküle, in einer Schrift von J. Power.[2])

Von der Wärmetheorie wandte sich Thomson wieder zur Theorie der Elektrizität und des Magnetismus, um auch dort die neuen Prinzipien zur Anwendung zu bringen. Zuerst erschien eine Untersuchung über thermoelektrische Ströme.[3]) Diese lieferte, allerdings unter wesentlicher Benutzung des verbesserten Carnotschen Prinzips, auf Grund der 1823 von Cumming[4]) entdeckten Umkehrung der thermoelektrischen Ströme das neue und überraschende Resultat, daß ein galvanischer Strom außer der Jouleschen Wärme,

1) J. J. Waterston: On dynamical sequences in kosmos. Athen. 1853, p. 1099.

2) J. Power: Theory of the reciprocal action between the solar rays and the different media by which they are reflected, refracted or absorbed. Phil. Mag. (4) 6, p. 218, 1853.

3) W. Thomson: On a mechanical theory of thermo-electric currents. Phil. Mag. (4) 3, p. 529, 1852. Proc. of Edinb. Soc. III, p. 91, 1852.

4) Cumming: Phil. Trans. Cambridge 1823, p. 61.

die dem Quadrat seiner Intensität proportional ist, in einem ungleich erwärmten Leiter auch noch eine andere Wärme produziert, die später sogenannte Thomsonsche Wärme, die der einfachen Intensität proportional ist und daher ihr Vorzeichen wechselt, wenn man den Strom umkehrt. Während die Joulesche Wärme als von dem Widerstand des Leiters herrührend zu betrachten ist, stammt die Thomsonsche Wärme von einer im Innern des Leiters wirksamen elektromotorischen Kraft her. Diesen rein theoretisch abgeleiteten Satz fand Thomson später nach vielen Bemühungen auch experimentell bestätigt.[1])

Eine weitere wichtige Anwendung der Theorie ist enthalten in einer Abhandlung[2]) von Thomson über den Entladungsstrom eines elektrisierten Leiters, z. B. einer Kugel, der durch einen dünnen Draht mit einem anderen Leiter verbunden wird. Während der Strom aus dem einen Leiter zum andern fließt, muß die Gesamt-Energie des Systems konstant bleiben. Diese setzt sich aber zusammen aus folgenden drei Teilen: 1. Elektrostatisches Potenzial, 2. Wärme, die durch den Entladungsstrom erzeugt ist, 3. Elektrodynamische Energie des Stromes. Daß eine Energie der letzten Art existiert, daß also ein galvanischer Strom durch seine Existenz an und für sich einen bestimmten Vorrat von Energie repräsentiert (actual energy oder mechanical value of the current), geht daraus hervor, daß ein Strom durch sein Verschwinden ohne einen Aufwand von anderweitiger Energie Wärme zu produzieren vermag, z. B. als Extrastrom. Diese Energie ist wesentlich positiv, also proportional dem Quadrat

1) W. Thomson: On the dynamical theory of heat. Thermo-electric currents. Phil. Mag. (4) 11, p. 214, 281, 379, 433, 1856. Ferner: 8, p. 62, 1854.

W. Thomson: On the electrodynamic properties of metals. Phil. Trans. London 1856, p. 649.

2) W. Thomson: On transient electric currents. Phil. Mag. (4) 5, p. 393, 1853.

der Stromstärke, sie darf aber nicht etwa einfach als lebendige Kraft der im Strom sich bewegenden, mit träger Masse begabten elektrischen Teilchen aufgefaßt werden, schon weil ihr Wert erfahrungsgemäß wesentlich von der Form des Stromleiters abhängt. Derselbe ist gleich 0, wenn der Leiter so geformt ist, daß neben jedem Stromelement unmittelbar ein entgegengesetztes verläuft; denn dann verschwindet der Extrastrom völlig.[1])

Bildet man nun durch Summierung obiger drei Ausdrücke den Ausdruck der Gesamtenergie des Systems, und setzt die Änderung dieser Größe für jedes Zeitelement = 0, so erhält man eine Gleichung zur Bestimmung der Abhängigkeit der Stromstärke von der Zeit. Thomson fand hieraus, daß die Entladung, je nach dem Werte der verschiedenen in der Aufgabe enthaltenen Konstanten, auf zwei ganz verschiedene Arten erfolgen kann. Entweder: der Entladungsstrom fließt stets in demselben Sinn, mit anfangs steigender, dann allmählich wieder abnehmender Intensität, oder aber: die Stromrichtung oszilliert und ladet dadurch den Leiter abwechselnd positiv und negativ. Dabei nimmt der absolute Betrag der maximalen Stromstärke allmählich gegen 0 hin ab. Beide Arten von Entladungen sind seitdem wiederholt, experimentell wie theoretisch, nachgewiesen worden.

Nächst Thomson tat sich unter den englischen Physikern am meisten Rankine hervor in der Durchbildung der neuen Ideen. Neben einigen spezielleren Anwendungen[2]) versuchte dieser es auch, eine allgemeine Definition des Begriffes der Energie zu geben, deren Anwendung nicht bloß auf das Ge-

---

1) M. Faraday: Exp. Res. Phil. Trans. London 1835, p. 50. § 1096.

2) M. Rankine: Mechanical theory of heat. — Specific heat of air. Phil. Mag. (4) 5, p. 437, 1853.

M. Rankine: On the application of the law of the conservation of energy to the determination of the magnetic meridian on board ship. Phil. Mag. (4) 6, p. 140, 1853.

biet der Wärme beschränkt sein, sondern alle Naturkräfte umfassen sollte.[1]) Er nennt Energie „Every affection of substances which constitutes or is commensurable with a power of producing change in opposition to resistance", was Helmholtz übersetzt[2]): „Jedes Zukommnis einer Substanz, welches besteht in, oder vergleichbar ist mit einer Kraft, die fähig ist, Veränderungen hervorzubringen, bei denen ein Widerstand überwältigt werden muß". Dabei unterscheidet und definiert Rankine zwei Hauptarten von Energie, die aktuelle, kinetische, und die potenzielle Energie (Energie der Bewegung und Energie der Lage), deren Bedeutung sich ganz mit der der Helmholtzschen Begriffe: Lebendige Kraft und Spannkraft deckt. Auch stellt er eine allgemeine Untersuchung an über die Verwandlung der verschiedenen Arten der Energie ineinander,[3]) in welcher jedoch die Erzielung unbeschränkter Allgemeinheit nur durch eine merkliche Einbuße an Präzision in der Ausdrucksweise erkauft wird. Überhaupt scheint auch die obige Definition der Energie in physikalischer Hinsicht keinen besonders hohen Wert zu besitzen, da sie viel zu unbestimmt gehalten ist. Physikalisch brauchbar kann eine Definition doch nur dann genannt werden, wenn es möglich ist, mit ihrer Hilfe für jeden beliebig gegebenen Fall den numerischen Wert der definierten Größe anzugeben — eine Leistung, von deren Erfüllung die vorliegende Definition, gerade im Gegensatz zur Thomsonschen (S. 72), offenbar weit entfernt ist.

Zu erwähnen ist hier noch eine Arbeit[4]) von Joule über die Berechnung einiger chemischer Verbindungswärmen

---

1) M. Rankine: On the general law of the transformation of energy. Phil. Mag. (4) 5, p. 106, 1853.

2) Fortschr. d. Phys. v. J. 1853, Berlin 1856, p. 407.

3) Vgl. auch Rankine: Outlines of the science of energetics. Edinb. Journ. (2) II, p. 120, 1855.

4) J. P. Joule: On the heat disengaged in chemical combinations. Phil. Mag. (4) 3, p. 481, 1852.

(Kupferoxyd, Zinkoxyd, Wasser) auf galvanischem Wege. Wird in einen Strom an Stelle eines metallischen Leiters ein Zersetzungsapparat derart eingeschaltet, daß die Stromstärke die nämliche ist wie vorher, so ist offenbar die dem Zersetzungsapparat von dem Strome zugeführte Energie im ganzen gleich der vorher dem Leiter zugeführten, da ja im übrigen Stromkreis sich genau wieder die nämlichen Vorgänge vollziehen. Die dem Leiter zugeführte Energie besteht lediglich in Wärme, die dem Zersetzungsapparat zugeführte aber in Wärme und chemischer Arbeit, man findet also durch den Wenigerbetrag der im Zersetzungsapparat entwickelten Wärme den Wärmewert der chemischen Arbeit, und dies ist eben die Verbindungswärme der zersetzten Substanz. —

In unseren letzten Ausführungen sind wir der Entwicklung, die das Energieprinzip von seiten der englischen Physiker erfuhr, bis zum Jahre 1853 gefolgt. Das entschiedene Übergewicht, dessen sich die neue Theorie um diese Zeit in der wissenschaftlichen Welt bereits erfreuen durfte, dokumentiert sich treffend durch eine Rede, mit welcher W. Hopkins als Präsident die 23. Versammlung der British Association in Hull eröffnete, und in der die Verdienste von Rumford, Joule, Rankine, Thomson hervorgehoben werden.[1])

Während so in England unablässig an dem Ausbau der Theorie gearbeitet wurde, war man auch in Deutschland nicht müßig geblieben. Hier erwarb sich Clausius das Hauptverdienst um die Weiterbildung der von ihm schon in seiner ersten Abhandlung über die bewegende Kraft der Wärme angegebenen Prinzipien. Zuerst erschien eine Untersuchung über die Wirkungen einer elektrischen Entladung.[2])

---

1) W. Hopkins: Dynamical theory of heat. Rep. of Brit. Ass. 23. Meeting Hull 1853, p. XLV.

2) R. Clausius: Über das mechanische Äquivalent einer elektrischen Entladung und die dabei stattfindende Erwärmung des Leitungsdrahtes. Pogg. Ann. 86, p. 337, 1852.

Diese können verschiedenartiger Natur sein, besonders mechanischer oder thermischer Art, in allen Fällen aber ist die durch die Entladung produzierte Gesamtenergie, also die Summe der geleisteten mechanischen Arbeit und der erzeugten Wärme gleich der Abnahme der elektrischen Energie, also des elektrostatischen Potenzials. Diesen Satz spricht Clausius in der Form aus: „Die Summe aller durch eine elektrische Entladung hervorgebrachten Wirkungen ist gleich der dabei eingetretenen Zunahme des Potenzials der gesamten Elektrizität auf sich selbst" — indem das Potenzial hier noch mit entgegengesetztem Vorzeichen genommen ist. An die Ausführung dieses Satzes schließen sich Auseinandersetzungen über die Übereinstimmung der Theorie mit einzelnen Versuchen.

Von den elektrostatischen Wirkungen geht Clausius in einer weiteren Arbeit[1]) über zu denjenigen, die ein stationärer galvanischer Strom im Innern eines metallischen Leiters verursacht. Wenn durch einen metallischen Leiter ein konstanter Strom fließt, der keinerlei Induktionswirkungen von außen erleidet, so wird der Strom getrieben lediglich durch die an den Oberflächen der verschiedenen Leiter angehäufte freie statische Elektrizität. Daher gelangt Clausius zu dem Satze: „Die bei einer bestimmten Bewegung einer Elektrizitätsmenge von der im Leiter wirksamen Kraft getane Arbeit ist gleich der bei der Bewegung eingetretenen Zunahme (Abnahme) des Potenzials dieser Elektrizitätsmenge und der freien Elektrizität aufeinander". Da nun in einem metallischen Leiter weder mechanische noch chemische Wirkungen stattfinden, so verwandelt sich diese Arbeit ganz in Wärme, woraus dann das Joulesche Erwärmungsgesetz hervorgeht. — Während so die strömende Elektrizität im Innern der Leiter von höheren zu tieferen Werten des Poten-

1) R. Clausius: Über die bei einem stationären Strom in dem Leiter getane Arbeit und erzeugte Wärme. Pogg. Ann. 87, p. 415, 1852.

zials herabsinkt und dadurch fortdauernd Wärme produziert, muß es andrerseits Stellen geben, wo sie in ihrem Kreislauf durch die geschlossene Kette wieder zur ursprünglichen Höhe des Potenzials emporgehoben wird, und diese Stellen finden sich an den Grenzflächen je zweier benachbarter Leiter, wo das Potenzial einen Sprung erleidet und also die hindurchfließende Elektrizität auf unendlich kleinem Wege eine endliche Arbeit verrichtet bez. verbraucht. Diese Arbeit kann sich je nach den Umständen in Wärme oder auch in chemische Energie verwandeln. Das erstere ist der Fall bei den thermoelektrischen Ketten, deren Wirksamkeit Clausius zum Gegenstand einer ferneren Untersuchung[1]) macht. Hier äußert sich die von der Elektrizität beim Durchgang durch eine Lötstelle zweier thermoelektrisch wirksamer Metalle geleistete Arbeit in der von Peltier entdeckten Wärmeerzeugung oder -Absorption. Bezüglich der Frage, ob die Peltiersche Wärme stets äquivalent sei der durch die Überwindung der elektrischen Spannung an der Lötstelle geleisteten Arbeit, bringt Clausius einen prinzipiell wichtigen, bis zum heutigen Tag noch nicht endgültig aufgeklärten Punkt ausführlich zur Sprache. Die Peltiersche Wirkung an der Lötstelle zweier Metalle ist bekanntlich durchaus nicht proportional der elektroskopischen (Voltaschen) Spannung, welche dieselben Metalle bei gegenseitiger Berührung am Elektrometer zeigen. Wir werden die eingehende Besprechung dieser für die Anwendung des Prinzips der Erhaltung der Energie wichtigen Tatsache erst im dritten Abschnitt vornehmen. Kurz erwähnt sei noch, daß Clausius ebenso wie vorher Thomson auch den zweiten Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie auf die thermoelektrischen Erscheinungen anwendet und dabei zu den entsprechenden Resultaten gelangt.

1) R. Clausius: Über die Anwendung der mechanischen Wärmetheorie auf die thermoelektrischen Erscheinungen. Pogg. Ann. 90, p. 513, 1853.

Etwas auffallend muß die Zurückhaltung erscheinen, welche die französischen Physiker der so rapid fortschreitenden Entwickelung des neu entdeckten Prinzips gegenüber noch bis in die Mitte der fünfziger Jahre bewahrten; man konnte sich offenbar nicht so schnell zur Aufgebung der auf Grund der Annahme des Wärmestoffes hauptsächlich in Frankreich ausgebildeten Wärmetheorie entschließen, wenngleich die auf dem Gebiete der Kalorimetrie und der Wärmeleitung gemachten wichtigen Erfahrungen schließlich fast ganz ungeändert in die neue Anschauung mit hinübergenommen werden konnten. Findet man doch noch im Jahre 1854 in den Comptes rendus,[1]) von einem Offizier außer Diensten: Hermite, sogar die Beschreibung einer nach Art des Elektrophor wirkenden Maschine, die zugleich Elektrizität und Arbeit liefern sollte!

Der erste unter den bedeutenden französischen Physikern, der es unternahm, mit den alten Anschauungen zu brechen, war V. Regnault in seiner großen Experimentalarbeit[2]) über die spezifische Wärme der Gase, in welcher er durch exakte Messungen endgültig feststellte, daß die spezifische Wärme der permanenten Gase wesentlich unabhängig vom Volumen ist, daß also die durch die Kompression erzeugte Wärme nicht, wie man es früher annahm, einer Veränderlichkeit der Wärmekapazität zugeschrieben werden kann.

Inzwischen nahm die Bewegung, welche durch die neue Lehre in der Wissenschaft entstanden war, einen immer breiteren Fluß an, immer neue Gesichtspunkte, neue Anwendungen wurden hervorgesucht. Entweder wurden die Folgerungen durch die Erfahrung bestätigt, oder sie lieferten interessante, bis dahin verborgen gebliebene Einblicke in

1) Hermite: Théorie et description d'une machine à courants électriques. Compt. Rend. 39, p. 1200, 1854.

2) V. Regnault: Recherches sur les chaleurs spécifiques des fluides élastiques. Compt. Rend. 36, p. 676, 1853.

den Haushalt der Natur. Im Februar 1854 hielt Helmholtz in Königsberg einen populär-wissenschaftlichen Vortrag[1]) über die Wechselwirkung der Naturkräfte, dessen Hauptinhalt das neue Prinzip bildete, vornehmlich in seiner Anwendung auf die Theorie der Wärme. Die Frage nach dem Wiederersatz der ausgestrahlten Sonnenwärme, der Quelle alles irdischen Lebens, wird durch die Annahme gelöst, daß die Sonne sich durch fortdauernde Verdichtung immer wieder erwärmt. Dabei ergibt sich, daß eine Verringerung des Durchmessers der Sonne um den 10000. Teil seiner jetzigen Größe eine Wärmemenge produziert, die imstande ist, die Strahlung der Sonne für 2100 (nach einer späteren Berechnung 2289) Jahre in ihrer jetzigen Stärke zu erhalten.

In etwas anderer Weise beantwortet Thomson[2]) die nämliche Frage, indem er voraussetzt, daß es fremde kosmische Massen sind, die durch ihr Hineinfallen in den Sonnenkörper die Erwärmung des letzteren hervorrufen. Thomson berechnet, daß, wenn auf diese Weise die Wärmeausgabe der Sonne stets gerade wieder gedeckt würde, der Durchmesser der Sonne in 4000 Jahren um $^1/_{10}$ Bogensekunde zunehmen müßte.

Eine andere Anwendung der mechanischen Wärmetheorie auf die Energie der Sonnenstrahlung macht Thomson[3]) in bezug auf die Dichtigkeit des Lichtäthers. Nimmt man Licht- und Wärmestrahlen als identisch, so wird die ganze durch die Strahlung der Sonne an die Erde abgegebene Wärmeenergie geliefert durch die lebendige Kraft der schwingenden Ätherteilchen, und man kann daraus, mit Zugrundelegung

---

1) H. Helmholtz: Über die Wechselwirkung der Naturkräfte. Königsb. 1854. Vortr. und Reden I p. 25.

2) W. Thomson: Mémoire sur l'énergie mécanique du système solaire. Compt. Rend. 39, p. 682, 1854.

3) W. Thomson: Note sur la densité possible du milieu lumineux et sur la puissance mécanique d'un mille cube de lumière solaire. Compt. Rend. 39, p. 529, 1854.

der Pouilletschen Messungen der Strahlungsintensität, die Dichtigkeit des Lichtäthers berechnen. Allerdings gehört dazu auch die Kenntnis der Geschwindigkeit der Schwingungen eines Ätherteilchens, oder, da wir die Schwingungsdauer kennen, der Amplitude dieser Schwingungen. Thomson nimmt an, daß die Geschwindigkeit, mit der ein Ätherteilchen seine Gleichgewichtslage passiert, kleiner ist als der 50. Teil der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes, was man sicher tun kann, da doch das Verhältnis der Schwingungsamplituden zur Wellenlänge ein kleines ist, und folgert daraus, daß ein englischer Kubikfuß Äther eine größere Masse besitzt als der 156-trillionte Teil eines Pfundes.

Alle diese Berechnungen erfordern natürlich die Kenntnis des mechanischen Wärmeäquivalents, und es liegt auf der Hand, daß sich das Bedürfnis nach einer möglichst exakten Bestimmung dieser wichtigen Konstanten bald fühlbar machte; denn wenn auch die Jouleschen Messungen als relativ zuverlässig gelten konnten, so differierten dessen genaueste Versuchsresultate untereinander doch immer noch in der dritten Zifferstelle. Hier war den Physikern ein fruchtbares Feld für Experimentaluntersuchungen gegeben, und so sehen wir denn allmählich eine ganze Literatur von Bestimmungen des mechanischen Wärmeäquivalents entstehen, von denen allerdings die meisten nach schon bekannten Methoden ausgeführt wurden und nur wenige sich an Exaktheit mit den Jouleschen Berechnungen messen konnten; wir werden im folgenden nur derjenigen besonders Erwähnung tun, die auf wesentlich neuen Ideen beruhen. Nächst Joule, dessen Versuchszahlen L. Soret[1]) zusammenstellte, erwarb sich G. A. Hirn durch eine lang fortgesetzte Reihe von Experimentalarbeiten wichtige Dienste auf diesem Gebiet. Zunächst veranlaßt durch ein Preisausschreiben der Berliner physi-

1) L. Soret: Sur l'équivalence du travail mécanique et de la chaleur. Arch. d. scienc. phys. et nat. 26, p. 33, 1854.

kalischen Gesellschaft teilte er im Jahre 1855 die Ergebnisse einiger Versuchsreihen mit,[1]) die nach ganz verschiedenen, mehr oder weniger originellen Methoden angestellt worden waren. Allerdings weichen die aus den einzelnen Versuchen gewonnenen Zahlen für das mechanische Wärmeäquivalent nicht unerheblich voneinander ab. So ergab die Beobachtung der Wärmeerzeugung durch Reibung einer gußeisernen Trommel an einem Metallkörper die Zahl 371,6 Kgrm., durch Bohren eines Metallstücks die Zahl 425 Kgrm. Von prinzipieller Wichtigkeit war die Berechnung des Wärmeäquivalents durch die Vergleichung der von einer Dampfmaschine geleisteten Arbeit mit der in ihr verbrauchten Wärme, da hier zum erstenmal Arbeitsleistung, nicht Arbeitsverbrauch zur Grundlage der Messung gemacht wurde, abgesehen von den wenigen Jouleschen Versuchen über die Ausdehnung von Luft unter Drucküberwindung. Das Resultat war (nach einer von Clausius[2]) verbesserten Rechnung) 413. Endlich untersuchte Hirn auch den Betrag der vom menschlichen Körper im Zustand der Ruhe und im Zustand des Arbeitens nach außen abgegebenen Wärme. Im letzteren Falle ist diese Wärme beträchtlicher, infolge der verstärkten Respiration des arbeitenden Körpers, doch muß nach der Theorie der Mehrbetrag an produzierter Wärme geringer sein als es dem vermehrten Sauerstoffverbrauch entsprechen würde, wegen der gleichzeitig geleisteten Arbeit. Hirn fand dies in der Tat bestätigt, erhielt aber, wegen der vielen unkontrollierbaren Fehlerquellen, quantitativ sehr verschiedenwertige Resultate. Dies veranlaßte ihn zu der merkwürdigen Folgerung, daß das Wärmeäquivalent doch nicht konstant sei, und daß also

1) G. A. Hirn: Recherches expérimentales sur la valeur de l'équivalent mécanique de la chaleur. 1855. Fortschr. d. Phys. v. J. 1855. (Referat von Clausius.)

G. A. Hirn: Recherches sur l'équivalent mécanique de la chaleur présentées à la société de physique de Berlin. Colmar 1858.

2) Fortschr. d. Phys. v. J. 1855, p. XXIII.

die mechanische Wärmetheorie auf falscher Grundlage beruhe.

Doch gab Hirn hiermit die Sache noch nicht auf: später mit Reibung fester Körper unter starkem Druck angestellte Versuche,[1]) welche die Äquivalenzzahl 451 Kgrm. ergaben, und besonders die durch neue Versuche an Dampfmaschinen gewonnenen Resultate veranlaßten ihn doch schließlich, sich mit der Annahme der Konstanz des Wärmeäquivalents einverstanden zu erklären.[2])

Dieser Gedanke wird denn auch durchgeführt in seinem umfangreichen Werk[3]) über die mechanische Wärmetheorie (1862), in welchem er übrigens Wärme nicht als Bewegung, sondern, in ähnlicher Weise wie Mayer, als ein „besonderes Prinzip" aufgefaßt wissen will. In diesem Werke veröffentlicht er eine Anzahl neuer Versuche zur Bestimmung des Wärmeäquivalents. Dieselben beruhen einmal auf der Reibung einer Flüssigkeit, die zwischen einem massiven und einem hohlen Zylinder eingeschlossen ist (Resultat: 432 Kgrm.), dann auf dem Ausströmen von Wasser unter hohem Druck (Resultat: 433 Kgrm.), ferner auf dem Stoß fester Körper. Ein eiserner Zylinder, der an zwei Paar Seilen horizontal aufgehängt ist, fällt seitlich gegen einen als Ambos dienenden ebenso aufgehängten Sandsteinblock, während zwischen ihnen sich ein Bleizylinder befindet, der durch den Stoß erwärmt wird (Resultat: 425 Kgrm.). Wieder andere Versuche sind mit der Expansion von Gasen angestellt (Resultat: 441,6 Kgrm.). Als Mittel aus all seinen Versuchen entscheidet sich Hirn schließlich für den Wert 432 Kgrm. des mechanischen Wärmeäquivalents, der also die Joulesche Zahl

1) G. A. Hirn: Recherches sur l'équivalent mécanique de la chaleur présentées à la société de physique de Berlin. Colmar 1858.

2) Hirn: Equivalent mécanique de la chaleur. Cosmos XVI, p. 313, 1860.

3) G. A. Hirn: Exposition analytique et expérimentale de la théorie mécanique de la chaleur. Paris et Colmar 1862.

um etwa 2% übertrifft. — Dagegen fand Favre[1]) 1858 aus Beobachtungen über die Reibungswärme, die entsteht, wenn Stahlfedern gegen eine rotierende Scheibe gepreßt werden, die Zahl 413,2 Kgrm.

Ehe wir zur Besprechung anderer, auf elektrischem Wege gewonnener Bestimmungen des Wärmeäquivalents übergehen, wollen wir noch einen Blick werfen auf den weiteren Entwicklungsgang der Wärmetheorie um die damalige Zeit. Nachdem die Allgemeingültigkeit des Satzes von der Äquivalenz der Wärme und Arbeit einmal durchweg anerkannt war, begann sich das allgemeine Interesse schon mehr und mehr von diesem Satze ab und dem zweiten Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie, dem modifizierten Carnotschen Prinzip, zuzuwenden, so daß wir die Darstellung der Fortschritte dieser Theorie hier schon wesentlich einschränken müssen. Die meisten Untersuchungen, experimenteller wie theoretischer Natur, die seit jener Zeit auf diesem Gebiete angestellt wurden, behandeln oder haben zur Voraussetzung die Gültigkeit des Carnotschen Prinzips, so daß man selten mehr auf einen neuen Satz stößt, der sich als reine Folgerung des Prinzips der Erhaltung der Energie erweist. Ein solcher findet sich ausgesprochen in einer Abhandlung[2]) von G. Kirchhoff, er betrifft die Abhängigkeit der Wärme, die bei der chemischen Verbindung zweier Körper nach außen abgegeben wird, von der Temperatur, bei der die Reaktion stattfindet, sowie von den spezifischen Wärmen der Körper und der Verbindung, und beruht nur auf der Voraussetzung, daß die innere Energie (nach Kirchhoff: Wirkungsfunktion) eines Körpers durch seinen augenblicklichen Zustand vollständig bestimmt ist; es ist für ihren Wert und folglich auch für die

1) P. A. Favre: Recherches sur l'équivalent mécanique de la chaleur. Compt. Rend. 46, p. 337, 1858.

2) G. Kirchhoff: Über einen Satz der mechanischen Wärmetheorie und einige Anwendungen desselben. Pogg. Ann. 103, p. 177, (203), 1858.

ganze nach außen abgegebene Wirkung ganz einerlei, ob der chemische Prozeß direkt vorgenommen wird, oder ob man vorher die beiden Körper einzeln auf eine andere Temperatur bringt und dann den Prozeß einleitet, wenn nur schließlich der Endzustand wieder der nämliche ist.

Einen ganz ähnlichen Satz für die Lösungswärme von Salzen bei verschiedenen Temperaturen hatte schon im Jahre 1851 Person[1]) entwickelt, war aber dabei noch von der alten Vorstellung eines Wärmestoffes ausgegangen. In der Tat führen hier beide Anschauungen zum nämlichen Ziel (wenn man von der äußeren Arbeit absieht), wie wir das auch schon früher an dem Satze von Heß (S. 23) über die chemische Wärme bemerkten, welcher auf ganz der nämlichen Grundlage beruht.

Mit einer neuen Art Energie beschäftigt sich Thomson in einer Untersuchung[2]) über die Ausdehnung eines Flüssigkeitshäutchens, in welcher gezeigt wird, daß die Oberflächenspannung Arbeit zu liefern imstande ist. Doch spielt hier die Anwendung des Carnotschen Prinzips schon eine zu wesentliche Rolle, um ein näheres Eingehen auf den Inhalt zuzulassen.

Inzwischen hatte auch die im engeren Sinne so zu benennende mechanische Wärmetheorie einen wichtigen Schritt vorwärts getan. Zuerst wurde im Jahre 1856 durch eine Abhandlung[3]) von Krönig, deren Inhalt sich im wesentlichen mit dem der oben erwähnten Jouleschen Schrift aus dem Jahr 1851 deckt, ohne jedoch im mindesten von ihr abhängig zu sein, die allgemeine Aufmerksamkeit auf die Hypothese gelenkt, nach welcher die einzelnen Gaspartikel in gerad-

---

1) C. Person: Recherches sur la chaleur latente de dissolution. Ann. d. chim. et d. phys. (3) 33, p. 448, 1851.

2) W. Thomson: On the thermal effect of drawing out a film of liquid. Proc. Roy. Soc. London IX, 255, 1858.

3) A. Krönig: Grundzüge einer Theorie der Gase. Berlin 1856. Pogg. Ann. 99, p. 315, 1856.

linigen Bahnen mit gleichbleibender Geschwindigkeit im Raume umherfliegen und durch ihren Anprall gegen eine feste Wand den Druck des Gases, sowie durch ihre lebendige Kraft den Wärmeinhalt desselben bemerklich machen. Krönig legt dabei besonderen Wert auf die Aufrechterhaltung des Satzes der Äquivalenz von Wärme und Arbeit, indem er nachweist, daß, sobald die Expansionskraft des Gases Arbeit leistet, die lebendige Kraft der Teilchen in entsprechendem Maße verkleinert wird. Im übrigen bleibt er noch, wie Joule, bei der Annahme stehen, daß die Gasmoleküle als einfache materielle Punkte zu denken seien, und mußte so auf die nämliche Schwierigkeit geraten, deren wir bereits oben Erwähnung getan haben, daß nämlich die aus der mechanischen Vorstellung berechnete Wärmekapazität bei konstantem Volumen beträchtlich kleiner ist als die auf kalorimetrischem Wege beobachtete. Erst Clausius[1]) gelang es, diesen bedenklichen Punkt, und zwar auf die glücklichste Weise, zu erledigen durch die Annahme, daß der Wärmeinhalt eines Gases, also die gesamte innere lebendige Kraft, nicht allein in der fortschreitenden Bewegung der Moleküle zu suchen sei, sondern daß außer dieser noch eine schwingende Bewegung innerhalb der Moleküle existiere, deren lebendige Kraft nach einem allgemeinen mechanischen Satz zu der ersten hinzuaddiert werden muß, um die gesamte lebendige Kraft zu ergeben. Nach dieser Vorstellung zerfällt also das einzelne Molekül, auch eines einfachen Gases, noch in kleinere Bestandteile (Atome), und während der Druck des Gases lediglich durch die fortschreitende Bewegung der Moleküle bestimmt wird, setzt sich die Wärme aus dieser und der schwingenden Bewegung zusammen. Da nun aber bei vollkommenen Gasen sowohl der Druck als auch die Wärme der absoluten Temperatur proportional sind, so folgt, daß die lebendige Kraft der fortschreitenden Bewegung zu der ge-

1) R. Clausius: Über die Art der Bewegung, welche wir Wärme nennen. Pogg. Ann. 100, p. 353, 1857.

samten im Gase enthaltenen lebendigen Kraft in einem konstanten, höchstens von der Natur des Gases abhängigen Verhältnis steht. Clausius findet dies Verhältnis für alle zweiatomigen Gase gleich 0,6315, während bei allen Gasen, in denen mehr als zwei Atome zu einem Molekül vereinigt sind, ein verhältnismäßig größerer Bruchteil der gesamten lebendigen Kraft zu intramolekularen Schwingungen verwendet wird.

Doch wir geraten hier schon auf speziellere Fragen, die unserer Aufgabe, die Entwickelung des Energiebegriffes zu schildern, ferner liegen. Es genügt der Hinweis darauf, daß der Versuch, die Wärme eines Gases als lebendige Kraft der einzelnen Teilchen aufzufassen, in der Tat als im wesentlichen geglückt zu betrachten ist und daß dadurch zwei bis dahin nach Form und Begriff verschiedene Arten von Energie, die der Wärme und die der Bewegung, zu einer einzigen verschmolzen worden sind. Daß die Wärmeerscheinungen, von diesem neuen Standpunkt aus betrachtet, durchweg dem Gesetze der Erhaltung der Energie gehorchen, ist von vornherein klar, solange man, wie es in der Gastheorie allgemein geschieht, die zwischen den Molekülen und Atomen wirkenden Kräfte als Zentralkräfte, oder den etwaigen Stoß zweier Partikel als vollkommen elastischen voraussetzt; denn hier befinden wir uns ja in dem Gebiete der reinen Mechanik, für welche bereits Helmholtz die Übereinstimmung des Satzes der lebendigen Kräfte mit dem der Erhaltung der Energie betont hat. Was derselbe jedoch nur mit den allgemeinen Ausdrücken „innere Spannkraft“ und „lebendige Kraft“ bezeichnen konnte, ist durch die neue Gastheorie bis ins einzelne präzisiert worden, und wenn die Ausdehnung der Theorie auf Flüssigkeiten und feste Körper bisher wegen der komplizierteren Verhältnisse noch keine nennenswerten Fortschritte gemacht hat, so sind diese Schwierigkeiten doch mehr in der Unvollkommenheit der Methoden als im Wesen der Sache begründet.

Es bleibt uns noch übrig, des weiteren Verlaufs der Anwendungen zu gedenken, die unser Prinzip auf dem Gebiete der Elektrizität und des Magnetismus in der Mitte und am Ende der fünfziger Jahre gefunden hat. Hier begegnen wir zunächst einer Arbeit[1]) von W. Thomson, die eine Art Übersicht der verschiedenen Arten von Energie gibt, welche in elektrischen und magnetischen Prozessen zur Wirksamkeit kommen. Wenn nämlich durch einen solchen Prozeß Arbeit erzeugt wird, was natürlich immer auf Kosten irgend eines Energievorrats geschieht, so stammt nach Thomson diese Arbeit aus einer von drei verschiedenen Arten von Energie her: 1) von elektrostatischer Energie, 2) von magnetischer Energie, 3) von elektrokinetischer (elektrodynamischer) Energie, die in galvanischen Strömen enthalten ist (S. 75); würden die elektrischen Teilchen Trägheit besitzen, so würde die lebendige Kraft einer Bewegung im Strom auch noch als Beitrag zu dieser letzteren Art Energie hinzutreten. Man erhält also durch Summierung dieser drei einzelnen Energiearten die gesamte in einem System von Körpern enthaltene elektrisch-magnetische Energie.

Die Art der Umsetzung von Energie, wie sie im geschlossenen galvanischen Stromkreis vor sich geht, ist von Koosen ausführlich dargestellt worden.[2]) Die Erzeugung von Wärme durch den Strom mußte den Gedanken nahelegen, auch diesen Vorgang zur numerischen Berechnung des mechanischen Wärmeäquivalents zu verwerten, und es sind auch nach dieser Methode eine Reihe von Bestimmungen ausgeführt worden. Seit den S. 34 erwähnten Versuchen von Joule, die auf die Zahl von 460 Kgrm. führten, hat zuerst le Roux diese Frage

1) W. Thomson: On the mechanical values of distributions of electricity, magnetism and galvanism. Phil. Mag. (4) 7, p. 192, 1854.

2) J. H. Koosen: Über die Gesetze der Entwickelung von Wärme und mechanischer Kraft durch den Schließungsdraht der galvanischen Kette. Pogg. Ann. 91, p. 427, 1854.

wieder aufgenommen.[1]) Durch eine magnetelektrische Maschine ließ er einen Strom erzeugen und verglich den kalorischen Effekt desselben mit dem mechanischen Arbeitsaufwand. Das Resultat war 458 Kgrm. für die Wärmeeinheit. Favre[2]) verfuhr etwas anders: er erzeugte den Strom nicht auf magnetischem Wege durch Induktion, sondern durch eine Hydrokette, schaltete aber dann einen Elektromotor ein und maß die Wärme, die vom Strom entwickelt wurde, erst mit, dann ohne Arbeitsleistung des Motors. Im letzteren Fall war die im Verhältnis zur chemischen Wirkung erzeugte Wärme natürlich bedeutender. Der Vergleich mit der im ersten Fall geleisteten Arbeit ergab als Äquivalenzwert Zahlen, die von 426 bis 464 differierten.

Einen etwas kleineren Wert: 399,7 erhielt Quintus Icilius durch direkte Messung der Jouleschen Wärme.[3]) Derselbe wurde zu dieser Untersuchung veranlaßt durch einen eklatanten Widerspruch, der sich ergeben hatte bei einer Vergleichung der aus den Versuchen von Lenz[4]) über galvanische Wärmeentwicklung abgeleiteten Werte für die Stromwärme mit den von der Theorie geforderten Werten. Dieser Widerspruch bezog sich auf die Größe des konstanten Koeffizienten c in der Formel für die in der Zeit 1 erzeugte Stromwärme: $Q = c \cdot J^2 \cdot W$. Wird Q in mechanischem Maß gemessen, so ist diese Konstante nach der Theorie = 1, vorausgesetzt, daß die Stromstärke J und der Widerstand W in absolutem Maß ausgedrückt sind (S. 67); wird aber die Wärme in Kalorien angegeben, so

1) J. P. le Roux: Mémoire sur les machines magnéto-électriques. Ann. d. chim. (3) 50, p. 463, 1857.

2) P. A. Favre; Recherches sur les courants hydro-électriques. Compt. Rend. 45, p, 56, 1857.

3) G. v. Quintus Icilius: Über den numerischen Wert der Konstanten in der Formel für die elektro-dynamische Erwärmung in Metalldrähten. Pogg. Ann. 101, p. 69, 1857.

4) E. Lenz: Über die Gesetze der Wärmeentwickelung durch den galvanischen Strom. Pogg. Ann. 61, p. 18, 1844.

ist c gleich dem reziproken Wert des mechanischen Wärmeäquivalents. Dagegen hatte Holtzmann[1]) aus den Lenzschen Versuchen[2]) für c einen über 4mal so großen Wert berechnet. Quintus Icilius unternahm es nun, den Widerstreit zwischen Theorie und Beobachtung zu schlichten, wobei übrigens die Entscheidung von vornherein nicht zweifelhaft sein konnte, da schon früher Thomson (S. 67) ganz ähnliche Untersuchungen angestellt und dabei hinreichend gute Übereinstimmung gefunden hatte.

In der Tat ergab sich aus den Versuchen von Quintus Icilius für jene Konstante ein Wert, der bedeutend kleiner war als der von Lenz, und dem von der Theorie verlangten schon um vieles näher kam. Betrachtete man ihn, wie es die Theorie will, wirklich als den reziproken Wert des mechanischen Wärmeäquivalents, so ergab sich daraus die oben genannte Zahl 399,7. Da die Frage nach der Ursache der Divergenz der Resultate von Lenz und Quintus Icilius immer noch unerledigt blieb, so fühlte sich J. Bosscha[3]) später veranlaßt, auf die Sache noch einmal zurückzukommen, und konstatierte dann als mutmaßlichen Grund der Unrichtigkeit der aus den Lenzschen Versuchen berechneten Zahl die beträchtliche Verschiedenheit der Kupfersorten, die Lenz bei seinen Versuchen und Holtzmann nachher bei seiner Berechnung benutzt hatte.

Einen anderen Weg, um zur Kenntnis des mechanischen Wärmeäquivalents zu gelangen, schlägt Bosscha ein,[4]) indem er die elektromotorische Kraft eines galvanischen Elements

---

1) C. Holtzmann: Die mechanische Arbeit, welche zur Erhaltung eines elektrischen Stromes erforderlich ist. Pogg. Ann. 91, p. 260, 1854.

2) E. Lenz: Über die Gesetze der Wärmeentwickelung durch den galvanischen Strom. Pogg. Ann. 61, p. 18, 1844.

3) J. Bosscha: Über das mechanische Äquivalent der Wärme, berechnet aus galvanischen Messungen. Pogg. Ann. 108, p. 162, 1859.

4) p. 168 l. c.

(Daniell) einmal in Wärmeeinheiten, dann in absolutem magnetischem Maße ausdrückt und diese beiden Zahlen durch einander dividiert; der Quotient liefert das mechanische Wärmeäquivalent. So findet er mit Benutzung einiger Angaben von Joule für das Wärmeäquivalent die Zahl 421,1 Kgrm.

Bosscha verfertigte auch, entsprechend einem allgemein gewordenen Bedürfnis, im Jahre 1858 die erste Zusammenstellung[1]) aller bis dahin von verschiedenen Physikern gemachten Bestimmungen des mechanischen Wärmeäquivalents, sei es durch bloße Rechnung oder durch direkten Versuch, — eine Tabelle, die allerdings noch recht bunte Zahlenreihen aufweist. Indessen schwanken die zuverlässigsten Versuche, zu denen immer noch in erster Linie die von Joule und die von Hirn gehören, im wesentlichen doch nur zwischen den Grenzen 420 und 430 Kgrm. Von den späteren Bestimmungen des Wärmeäquivalents werden wir noch im dritten Abschnitt dieser Schrift reden.

Ein besonderes Interesse nahm seit jener Zeit die Anwendung der neuen mechanischen Prinzipien auf die Theorie der galvanischen Kette und die sich darin abspielenden, zum Teil sehr verwickelten Prozesse der Elektrolyse in Anspruch. Schon Grotthuß hatte den Versuch gemacht, eine Theorie der galvanischen Zersetzung auf rein mechanische Vorstellungen zu gründen, Clausius[2]) entwickelte dann diese Vorstellungen weiter, wobei er jedoch, behufs Erzielung einer besseren Übereinstimmung mit dem Ohmschen Gesetz, einige wesentliche Modifikationen der älteren Anschauung einführte, so vor allem die Annahme, daß die Moleküle eines Elektrolyten im natürlichen Zustand keine bestimmten Gleichgewichtslagen besitzen, um welche sie oszillieren, sondern sich ganz

1) J. Bosscha: Het behond van arbeitsvermogen in den galvanischen stroom. Leiden 1858, vervollständigt von E. Jochmann: Fortschr. d. Phys. v. J. 1858, p. 351.

2) R. Clausius: Über die Elektrizitätsleitung in Elektrolyten Pogg. Ann. 101, p. 338, 1857.

unregelmäßig durcheinander bewegen, wobei es denn auch, durch zufällige Kombinationen, leicht einmal kommen kann, daß ein Molekül sich in seine beiden Bestandteile, den elektropositiven und den elektronegativen (die Teilmoleküle) spaltet, oder umgekehrt, daß zwei einzelne Teilmoleküle sich bei zufälligem Zusammentreffen zu einem Gesamtmolekül vereinigen. Wir dürfen allerdings auf diese einzelnen Fragen nicht weiter eingehen, sondern haben die Anwendungen zu untersuchen, die der Satz der Erhaltung der Energie auf diese Vorgänge findet, ganz unabhängig von solchen spezielleren Vorstellungen. Hierher gehört zunächst die Untersuchung der Arbeit, welche der Strom im Innern eines Elektrolyten leistet, und die, wie bei den Leitern erster Klasse, im allgemeinen ganz in Wärme verwandelt wird. Clausius findet ihren Betrag ganz entsprechend der in metallischen Leitern;[1]) das Joulesche Erwärmungsgesetz gilt also auch hier, wie es das Experiment schon lange bestätigt hatte. Etwas anderes ist es, wenn in den Elektrolyten ein poröses Diaphragma, eine tierische Membran oder dgl. eingeschaltet ist. Dann tritt im allgemeinen die Erscheinung der elektrischen Endosmose ein, d. h. es wird eine gewisse Quantität Flüssigkeit vom Strome durch die Scheidewand getrieben. In diesem Falle hat der Strom außer der schon angegebenen Arbeit noch eine andere zu leisten, welche einmal durch die Überwindung des der Bewegung der Flüssigkeit entgegenwirkenden hydrostatischen Druckes, dann auch durch die Reibung der Flüssigkeit in den Poren der Wand bedingt ist.[2])

Wichtiger noch für die Theorie ist die Feststellung des allgemeinen Zusammenhangs der chemischen Arbeit des Stromes mit seinen thermischen Leistungen, — eine Frage, die wir auch schon öfters zu berühren Veranlassung hatten,

1) R. Clausius: l. c. p. 340.
2) p. 357, l. c.

und die bis in die neueste Zeit die Physiker beschäftigt; Bosscha hat sich ihr zuerst spezieller gewidmet. Der Grundgedanke, der seinen und allen folgenden darauf bezüglichen Untersuchungen vorschwebt, ist die unmittelbare Folgerung des Satzes der Erhaltung der Energie, daß in einem stationären galvanischen Strom die Summe der vom Strom produzierten Wärme äquivalent ist dem Gesamtaufwand von chemischer Energie. Doch ging Bosscha anfangs von der unbegründeten Voraussetzung aus, daß die thermischen Wirkungen des Stromes sich beschränken allein auf die Joulesche Wärme, woraus nach den schon früher von Helmholtz und Thomson angestellten Betrachtungen folgen würde, daß die elektromotorische Kraft unmittelbar gemessen wird durch die von der Stromeinheit in der Zeiteinheit verbrauchte chemische Arbeit. Dieser Satz bestätigt sich allerdings speziell für das Daniellsche Element (S. 68). Indem Bosscha die elektromotorische Kraft eines solchen Elements zuerst elektromagnetisch bestimmte, und dann den Betrag derselben verglich mit den thermochemischen Versuchen von Favre und Silbermann, Andrews und Joule, fand er eine vollständig befriedigende Übereinstimmung.[1]) Dieser Glaube an die Äquivalenz der elektromotorischen Kraft einer Kette mit der ihr entsprechenden chemischen Wärmetönung scheint damals ziemlich weit verbreitet gewesen zu sein; so wollten Marié-Davy und Troost[2]) sich die thermochemischen Versuche schon ganz ersparen und statt dessen nur die Magnetnadel beobachten, was sich denn doch schließlich als etwas voreilig herausstellte. Sobald man einmal darauf aufmerksam wurde, daß außer der Jouleschen Wärme im Stromkreis

1) J. Bosscha: Über die mechanische Theorie der Elektrolyse. Pogg. Ann. 101, p. 517, 1857.

2) Marié-Davy et Troost: Mém. sur l'emploi de la pile comme moyen de mésure des quantités de chaleur développées dans l'acte des combinaisons chimiques. Ann. d. chim. (3) 53, p. 423, 1858. Ferner Compt. Rend. 46, p. 936, 1858.

auch noch andere thermische Wirkungen stattfinden (die Peltiersche Wärme war ja ohnedies längst bekannt), mußte auch jene Folgerung aus dem Grundprinzip ins Wanken geraten. Wir haben schon auf S. 69 ausgeführt, daß jede sekundär entwickelte oder absorbierte Wärme notwendig eine Modifikation jener Regel erheischt; umgekehrt muß aus jeder Abweichung der Größe der elektromotorischen Kraft von der obigen Regel mit Notwendigkeit auf eine Wärmewirkung in der Kette geschlossen werden, die von dem Jouleschen Gesetze abweicht.

Diese Folgerung erkannte Bosscha auch an und suchte sie im einzelnen zu bewahrheiten.[1]) Die schon oben (S. 69) angeführte Faradaysche[2]) Ansicht, daß in der Daniellschen Kette nur die Oxydation von Zink und Kupfer elektromotorisch wirksam sei, dagegen die Auflösung resp. Ausscheidung der Oxyde nur lokale Wärmetönung erzeuge, verwarf er, weil die auf Grund dieser Annahme aus den Versuchen von Favre und Silbermann berechnete elektromotorische Kraft zu klein ausfällt; dagegen sah er sich genötigt, bei der Wasserzersetzung eine lokale Wärmeerzeugung anzunehmen. Berechnet man nämlich die elektromotorische Kraft der Polarisation bei der Wasserzersetzung zwischen Platinelektroden einmal aus der Verbrennungswärme des Wasserstoffs, dann aus der durch die Einschaltung des Zersetzungsapparates hervorgerufenen Schwächung des elektrischen Stromes, so findet man die zweite Zahl um etwa 60% größer als die erste. Diese Abweichung denkt sich nun Bosscha von dem Umstand herrührend, daß die elektrolytisch entwickelten Gase nicht sofort in ihrer gewöhnlichen Gestalt erscheinen, sondern zuerst den „aktiven" Zustand durchmachen, eine allotrope Modifikation, die dadurch charakterisiert ist, daß in ihr jedes Gas

1) J. Bosscha: Über die mechanische Theorie der Elektrolyse. Pogg. Ann. 103, p. 487, 1858, ferner 105, p. 396, 1858.

2) M. Faraday: Exp. Res. Phil. Trans. London 1834 Apr., § 919.

eine größere potenzielle Energie (einen mehr gelockerten Zusammenhang der Atome) besitzt, wie im natürlichen Zustand, weshalb bei der Verbindung der aktiven Gase miteinander eine größere Wärmetönung auftreten muß; die elektromotorische Kraft nun, die bei der Polarisation beobachtet wird, entspricht nach Bosscha dieser größeren Verbindungswärme im aktiven Zustand. Andrerseits wird aber nachher, wenn die Gase in ihren natürlichen Zustand übergehen, eine gewisse lokale Wärmemenge in jedem Gase frei, die in gar keinem direkten Zusammenhang mit den elektrischen Vorgängen steht. Nach dieser Anschauung wäre also der Überschuß an Energie, welchen die elektromotorische Kraft des Polarisationsstroms im Vergleich zur chemischen Verbrennungswärme des Wasserstoffs liefert, der lokalen Wärme äquivalent, die in beiden Gasen beim Übergang aus dem aktiven in den natürlichen Zustand frei wird. Diese lokale Wärme bewirkt natürlich eine erhöhte Schwächung des Stromes der ganzen Kette, in der die Wasserzersetzung vor sich geht, da der Energieaufwand, den sie erfordert, der elektromotorischen Wirkung entzogen wird.

Da übrigens nach der Erfahrung die elektromotorische Kraft der Polarisation nicht konstant, sondern wesentlich abhängig ist von der Dichtigkeit des Stromes an den Elektroden, so muß Bosscha seinen Annahmen noch die weitere hinzufügen, daß im allgemeinen nicht die ganze beim Übergang eines Gases aus dem aktiven in den gewöhnlichen Zustand frei werdende Wärme lokal auftritt, sondern daß, namentlich bei größerer Elektrodenoberfläche, wo ein gewisser Teil des Gases schon unmittelbar an der Elektrode in den gewöhnlichen Zustand übergeht, der entsprechende Betrag von Energie noch dem ganzen Strom zugute kommt und also in Joulesche Wärme umgewandelt wird. Hierdurch würde sich dann die Abhängigkeit des Polarisationsstromes von der Stromdichtigkeit, sowie auch von der Natur des Elektrodenmetalls und des Elektrolyten erklären lassen.

Es versteht sich, daß sich für die unmittelbare Ursache der lokalen Wärmeerzeugung auch noch ganz andere Auffassungen als die Bosschasche geltend machen lassen, — es ist dies eine Frage, über die das Prinzip der Erhaltung der Energie von vornherein keinen Aufschluß erteilt: ihm wird genügt, wenn die lokale Wärme in dem voraus berechneten Betrage überhaupt an der entsprechenden Stelle zum Vorschein kommt.

Am klarsten spricht sich Bosscha über diese durch das Energieprinzip geforderten Abweichungen der galvanischen Wärmeerzeugung vom Jouleschen Gesetz in einer späteren Arbeit[1]) aus, in welcher hauptsächlich die Smeesche Säule und ihre lokale Wärmeentwickelung der Betrachtung unterzogen wird.

Wir stehen nunmehr in der Darstellung der Entwickelung unseres Prinzips etwa beim Jahre 1860. In dem kurzen Zeitraum von kaum 18 Jahren hatte sich dieser Satz aus gänzlich verborgenem oder wenigstens vollständig unbeachtetem Dasein zu einer im Gesamtbereich der Naturwissenschaften dominierenden Macht emporgeschwungen, wie man das bis dahin nur etwa von der großen Entdeckung Newtons erlebt hatte, die sich doch ihrerseits nur auf ein begrenztes Gebiet der Naturerscheinungen bezog. Bei dieser Schnelligkeit der Ausbreitung ist es nicht zu verwundern, wenn es auch um die genannte Zeit, besonders unter den älteren Physikern, immer noch einzelne gab, die sich mit den neuen Ideen noch nicht recht befreunden konnten. So ist von dem genialen Faraday[2]) bekannt, daß er an dem Begriff der potenziellen Energie, so wie ihn Rankine auffaßte, mancherlei

---

1) J. Bosscha: Über das Gesetz der galvanischen Wärmeentwickelung in Elektrolyten. Pogg. Ann. 108, p. 312, 1859.

2) M. Faraday: On the conservation of force. Phil. Mag. (4), 13, p. 225, 1857; 17, p. 166, 1859 etc. Vgl. M. Rankine: On the phrase 'potential energy' and on the definitions of physical quantities. Phil. Mag. (4) 33, p. 88, 1867.

auszusetzen fand. Er wollte sich nicht begnügen mit der einfachen Annahme, daß zwei sich anziehende Körper in größerer Entfernung eine größere potenzielle Energie besitzen, sondern er suchte für diese Energie noch ein besonderes physikalisches Substrat in einer veränderten Beschaffenheit des Zwischenmediums, wobei freilich zu bemerken ist, daß diese Überlegungen nicht eigentlich den Inhalt des Energieprinzips, sondern nur die Art seiner Durchführung betreffen.

Daß in der Anwendung des neuen Prinzips auch gelegentlich Mißverständnisse mit unterliefen, darf man bei der Ungewohntheit der durch dasselbe bedingten Denk- und Schlußweise nicht allzu auffallend finden. Schon Helmholtz[1]) bespricht in seiner „Erhaltung der Kraft" einige Einwände, die Matteucci[2]) aus eigenen Versuchen gegen die Zulässigkeit der neuen Auffassung, die allerdings damals noch nicht zu einem besonderen Prinzip formuliert war, beigebracht hatte, und deren Begründung uns am besten zeigt, wie schwer es damals selbst für einen geschulten Physiker halten mochte, in den Geist des Prinzips einzudringen. Unter anderem leitet er einen Einwand her aus der Tatsache, daß Zink bei seiner Auflösung in Schwefelsäure ebensoviel Wärme erzeugt, wenn die Auflösung auf gewöhnlichem chemischen Wege erfolgt, als wenn man zunächst, unter Benutzung einer Platinplatte als zweiter Elektrode, eine galvanische (Smeesche) Kette daraus bildet. Denn im ersten Fall wird durch den Prozeß nur Wärme produziert, im zweiten aber zugleich Wärme und Elektrizität, es müsse daher nach dem in Frage stehenden Satz die im letzteren Fall erzeugte Wärme kleiner sein um den Betrag des Äquivalents der produzierten Elektrizität. Matteucci beachtete nicht, daß dies Äquivalent am Schluß des Prozesses = 0 ist; denn die produzierte Elektrizität ist

1) H. v. Helmholtz: Wiss. Abh. I, p. 66, 1882.
2) Matteucci: Bibl. univ. Genève Suppl. Nr. 16, 1847, p. 375.

wieder verschwunden, sie hat nur als Mittelglied gedient für die Überführung der chemischen potenziellen Energie in thermische Energie.

Noch ungeheuerlicher erscheint uns die Behauptung, ein Strom müßte nach dem Prinzip weniger Wärme im Schließungskreis erzeugen, wenn er eine Magnetnadel in Ablenkung erhält, als wenn er dies nicht tut; denn diese Schlußfolgerung beruht auf einer gänzlichen Verkennung des Arbeitsbegriffes.

Aber auch noch in späterer Zeit treffen wir manchmal auf fehlerhafte Auffassungen. So betrachtete es 1857 Soret[1]) als ein Postulat des Prinzips, daß ein galvanischer Strom, welcher durch die elektromagnetischen Wirkungen eines Teils seiner Schließung mechanische Arbeit leistet, in diesem Teile weniger Joulesche Wärme entwickelt als in einem andern von gleichem galvanischen Widerstande, der keine solche Wirkungen äußert, — ein Irrtum, der übrigens auch anderen Physikern passiert ist.

Sehen wir von diesen immerhin sehr vereinzelten Fällen des Mißverständnisses ab, so läßt sich mit aller Bestimmtheit behaupten, daß um das Jahr 1860 der Kampf um die Anerkennung der neuen Theorie beendigt, und die Entscheidung endgültig zu ihren Gunsten ausgefallen war. Das Prinzip der Erhaltung der Energie hatte sich überall, wo man durch die Ausbildung der experimentellen Methoden in den Stand gesetzt war, eine Prüfung auszuführen, als vollkommen zulässig bewährt und wurde nun in die Zahl der Axiome aufgenommen, die der ferneren Forschung als Grundlage und Ausgangspunkt dienen. Ganz allmählich bürgerte sich nun auch das Wort „Energie" von England aus auf dem Kontinent ein, besonders seitdem dasselbe von Clausius in der Wärmelehre angenommen worden war.

Von dieser Zeit ab datiert für die Entwicklung aller

---

1) L. Soret: Recherches sur la corrélation de l'électricité dynamiques et des autres forces physiques. Arch. d. sc. phys. 36, p. 38, 1857.

exakten Naturwissenschaften eine neue Epoche. Bisher war man allenthalben, wo es nicht, wie in der Mechanik und Astronomie, schon gelungen war, die Grundgesetze zu finden, aus denen alle einzelnen Erscheinungen hervorgehen, auf die rein induktive Methode angewiesen; von jetzt an war man im Besitze eines Prinzips, das, auf allen bekannten Gebieten durch sorgfältige Untersuchungen erprobt, nun auch für gänzlich unbekannte und unerforschte Regionen einen vortrefflichen Führer abgab. Erstens war schon die ganze Fragestellung, die ja eins der wesentlichsten Elemente einer jeden Erfolg versprechenden Untersuchung ausmacht, in die richtige Bahn gelenkt, und dann hatte man an allen Punkten dieser einmal beschrittenen Bahn stets eine unfehlbare Kontrolle bei der Hand, deren Anwendung nie versagte. Für alle naturwissenschaftlichen Spekulationen bildet seitdem das Prinzip der Energie den solidesten Ausgangspunkt und ist in der Tat zu diesem Zweck schon vielfach benutzt worden.

Zugleich aber sehen wir, was dieser Rollenwechsel in der Stellung des Prinzips zu den übrigen Naturgesetzen für unsere jetzige Untersuchung im Gefolge hat. Während vorher diese Stellung eine engbegrenzte, die darauf bezügliche Literatur mehr oder weniger scharf von der übrigen abgesondert erschien, beginnen jetzt die Anwendungen nach allen Richtungen hin sich auszudehnen und allmählich in die Spezialgebiete sich zu verlieren, und wenn wir den Spuren der historischen Weiterentwicklung des Prinzips, sei es auch nur in der Physik, zu folgen trachten, so geraten wir in die einzelnen und einzelsten Fragen hinein, die zum größten Teil noch der endgültigen Lösung harren.

Es erscheint uns daher im Interesse der Übersichtlichkeit geboten, diese Fragen, soweit sie überhaupt noch der Geschichte des Prinzips selber angehören und nicht etwa bloß Anwendungen desselben auf anderweitige unbewiesene Hypothesen betreffen, nicht hier, sondern erst im Zusammenhang

mit der Darstellung der verschiedenen einzelnen Energiearten im dritten Abschnitt dieser Schrift zu behandeln, während der zweite der Aufgabe gewidmet sein soll, den Begriff der Energie auf Grund der vorangegangenen geschichtlichen Entwicklung in seiner Allgemeinheit zu begründen, die verschiedenen Arten der Formulierung des Prinzips der Erhaltung der Energie zu trennen und übersichtlich zu ordnen, und endlich über die Beweise, die man für die Gültigkeit des Prinzips beibringen kann, und deren Leistungsfähigkeit eine kritische Umschau zu halten.

II. Abschnitt.

Formulierung und Beweis des Prinzips.

Jede physikalische Definition, die Anspruch auf Brauchbarkeit macht, muß den zu definierenden Begriff in letzter Linie zurückführen auf Begriffe, die der unmittelbaren Wahrnehmung durch die Sinne entspringen, so daß es nur einer direkten Beobachtung bedarf, um die betreffende Größe mehr oder weniger exakt in Zahlenwerten auszudrücken. Da uns nun die Erscheinungen der Natur durch die verschiedenartigsten Sinne zum Bewußtsein gebracht werden, so würde es uns hier, wo es sich zunächst um die Aufstellung einer allgemeinen Definition des Begriffes der Energie handelt, nichts nützen, wenn wir uns etwa von vornherein auf den Standpunkt der mechanischen Naturauffassung stellen wollten; denn das mechanische Maß, mit dem wir eine jede beliebige Erscheinung messen können, ist uns ja nicht unmittelbar gegeben, es soll im Gegenteil überhaupt erst gesucht werden. Es wird daher zunächst unsere Aufgabe sein, die Definition der Energie unabhängig von jeder besonderen Naturauffassung rein auf meßbare Tatsachen zu begründen.

Von diesem Gesichtspunkt ausgehend können wir auf doppelte Weise verfahren. Wir können nämlich die Energie eines materiellen Systems definieren als eine Funktion, deren Wert in bestimmter Weise von den Variabeln abhängt, die den Zustand des Systems bestimmen, also von den Lagen, Geschwindigkeiten, Temperaturen usw. der materiellen Elemente des Systems. Diese Definition setzt aber bereits die Allgemeingültigkeit des Prinzips der Erhaltung der Energie

voraus; denn um zu wissen, daß eine solche Funktion überhaupt existiert und wie sie sich aus jenen einzelnen Größen zusammensetzt, muß man das Prinzip bereits kennen und anwenden.

Wir geben daher zunächst einer anderen, im wesentlichen von W. Thomson (S. 72) herrührenden Definition den Vorzug, welche, ganz ohne Rücksicht auf die Gültigkeit oder Nichtgültigkeit des Prinzips, den Wert der Energie eines materiellen Systems berechnen läßt lediglich aus den äußeren, der Beobachtung zugänglichen Wirkungen, welche das System bei einer gewissen Veränderung seines Zustandes hervorbringt. Danach bezeichnen wir die Energie (Fähigkeit, Arbeit zu leisten) eines materiellen Systems in einem bestimmten Zustand als den in mechanischen Arbeitseinheiten gemessenen Betrag aller Wirkungen, welche außerhalb des Systems hervorgebracht werden, wenn dasselbe aus seinem Zustand auf beliebige Weise in einen nach Willkür fixierten Nullzustand übergeht.

Zunächst erfordern einige in dem Wortlaut dieses Satzes enthaltene Ausdrücke eine besondere Erläuterung. Unter den „außerhalb des Systems hervorgebrachten Wirkungen" oder kürzer: unter den „äußeren Wirkungen" wollen wir alle am Schluß des Prozesses in der Natur eingetretenen Veränderungen verstehen, welche mit der Lage und Beschaffenheit der umgebenden, nicht in das System einbegriffenen Körper zusammenhängen, darunter also z. B. auch die Veränderung der Lage des Systems relativ zur Umgebung; denn dieselbe hängt, außer von der Lage des Systems selber, von der Lage der umgebenden Körper ab. Um die äußeren Wirkungen in ihrer Vollständigkeit zu erhalten, denkt man sich am besten das System zunächst vollständig isoliert im unendlichen Raum und führt erst dann diejenigen Körper in die Nähe, deren Einwirkung zur Herbeiführung des erforderlichen Überganges geeignet ist. Bewegt sich z. B. das System unter dem Einfluß der Schwere, so gehört zu den äußeren

Wirkungen auch die Änderung der Lage des Systems relativ zur Erde; der in Arbeitseinheiten gemessene Betrag derselben ist die bei der Bewegung von der Schwerkraft geleistete Arbeit. (Näheres hierüber weiter unten.) Etwas anderes ist es natürlich, wenn man die Erde mit in das betrachtete materielle System einbegreift; dann verschwindet die Arbeit der Schwerkraft als äußere Wirkung ganz.

Was ferner den in der Definition gebrauchten Ausdruck: „Der in mechanischen Arbeitseinheiten gemessene Betrag" (kurz: Arbeitswert, mechanisches Äquivalent) der äußeren Wirkungen betrifft, so hat derselbe natürlich nur unter der Voraussetzung einen bestimmten Sinn, daß entweder die äußeren Wirkungen an sich lediglich mechanischer Natur sind, d. h. in der Erzeugung oder dem Verbrauch von lebendiger Kraft oder mechanischer Arbeit bestehen, oder, falls sie von irgend anderer Art sind, daß dann ihr mechanisches Äquivalent schon anderweitig bekannt ist. Sollte diese Voraussetzung aber nicht erfüllt sein, nehmen wir z. B. an, die äußeren Wirkungen beständen in der Erzeugung irgend einer eigentümlichen Veränderung, etwa eines gewissen Agens, dessen Arbeitswert unbekannt sei, so läßt natürlicherweise die Definition zunächst im Stich, und man muß sich dadurch zu helfen suchen, daß man das neu erzeugte Agens auf irgend eine Weise wieder fortschafft, indem man es etwa zur Leistung mechanischer Arbeit oder zur Hervorbringung solcher Wirkungen verbraucht, die auf mechanisches Arbeitsmaß reduzibel sind. Gelingt dieser Versuch, so kann man schließlich doch alle äußeren Wirkungen in Arbeitsäquivalenten ausdrücken und so zum Ziel gelangen; dann stellt sich das mechanische Äquivalent einer Wirkung als diejenige Arbeitsmenge dar, in welche sich diese Wirkung verwandeln läßt. Hierbei bleibt es übrigens noch ganz dahingestellt, ob die Arbeitsmenge verschieden ausfällt, wenn die Verwandlung auf verschiedene Weise vorgenommen wird. Es ist aber auch sehr wohl der Fall denk-

bar, daß es überhaupt unmöglich ist, das neue Agens ganz in mechanische Wirkungen zu verwandeln, und in diesem Falle wird die für den Begriff des Arbeitswertes gegebene Erklärung, also auch die Definition der Energie, hinfällig.

Setzen wir z. B. einmal voraus, das mechanische Wärmeäquivalent sei noch unbekannt, und wir hätten die Energie irgend eines Körpers bei einer bestimmten Temperatur, unter gewöhnlichem Atmosphärendruck, zu berechnen; der Nullzustand des Körpers sei durch eine bestimmte tiefere Temperatur, etwa 0^0 Cels., charakterisiert. Es ist nun sehr leicht, den Körper durch Entziehung eines gewissen Wärmequantums, etwa mittelst Ableitung von Wärme, in den Nullzustand zu bringen, aber die dabei erzeugte äußere Wirkung, die Erwärmung der Umgebung, läßt sich durch keinerlei Hilfsmittel vollständig in mechanische Arbeit verwandeln; welche Versuche man auch zu diesem Zwecke anstellen wollte, es bliebe immer eine gewisse Veränderung übrig, die sich nicht direkt in Arbeitseinheiten messen läßt. Man könnte z. B. jene Wärme durch Ausdehnung des Trägers derselben in Arbeit umsetzen, dann hätte man aber wieder in dieser Ausdehnung eine gewisse Wirkung, deren mechanisches Äquivalent nicht bekannt ist, und die sich auch nicht auf mechanisch meßbare Veränderungen zurückführen läßt, kurz: man würde auf diesem Wege nie zu einem Ausdruck für den Wert der Energie gelangen.

Daraus folgt, daß in dem angeführten Falle die für den Begriff des „Arbeitswertes" einer Wirkung gegebene Erklärung einer geeigneten Ergänzung bedarf, und diese Ergänzung können wir auf die Tatsache gründen, daß, wenn eine gewisse Wirkung nicht vollständig in mechanische Arbeit verwandelt werden kann, sie sich doch stets durch Aufwand einer gewissen Arbeitsmenge erzeugen läßt. Bezeichnen wir daher in allen Fällen, wo die erste Erklärung nicht genügt, als mechanisches Äquivalent einer äußeren Wirkung diejenige Arbeitsmenge, welche aufgewendet werden

muß, um diese Wirkung hervorzubringen, oder kürzer: welche sich in diese Wirkung verwandeln läßt, auf beliebigem Wege, so gewinnen wir unter allen Umständen einen Ausdruck für den Arbeitswert der äußeren Wirkungen und somit für die Energie des betrachteten Systems. Dies zeigt sich in der Tat unmittelbar an dem beschriebenen Beispiel, wo die äußere Wirkung in der Erwärmung eines Körpers besteht. Während es unmöglich ist, diese Wirkung vollständig in Arbeit zu verwandeln, so stehen dagegen verschiedene Methoden zur Verfügung, um durch Anwendung rein mechanischer Mittel diese Wirkung hervorzurufen, d. h. den Körper aus der ursprünglich tieferen auf die höhere Temperatur zu bringen, wie: Stoß, Reibung, Kompression. Bei der Anwendung des letzten Mittels hat man natürlich dafür zu sorgen, daß der Körper sich nach erfolgter Kompression ohne äußere Arbeitsleistung wieder ausdehnt, damit die durch die Kompression erzeugte Wärme nicht nachher wieder verloren geht, wenn der Körper auf seinen ursprünglichen Druck zurückgebracht wird. Das mechanische Äquivalent einer Erwärmung ist also gleich der Arbeitsmenge, deren Verbrauch die Erwärmung hervorruft.

Wir sehen hieraus, daß unter Benutzung der angegebenen Festsetzungen die Definition der Energie irgend eines materiellen Systems in allen Fällen wenigstens einen, positiven oder negativen, Zahlenwert in bekannten Einheiten liefert, der je nach der Exaktheit der zu Gebote stehenden experimentellen Methoden mit größerer oder geringerer Genauigkeit festgestellt werden kann. Selbstverständlich ist die Definition unabhängig von jeder hypothetischen Vorstellung, die man sich von der Beschaffenheit der verschiedenen in der Natur wirksamen Agentien bilden kann, insbesondere auch von der mechanischen Anschauung, da sie einzig und allein auf der direkten Messung mechanischer Arbeitsgrößen beruht; ferner ist sie auch, was besonders bemerkenswert ist, durchaus unabhängig von der Gültigkeit des Prinzips der Er-

haltung der Energie, denn sie läßt es ganz unentschieden, ob man bei Anwendung verschiedener Methoden der Überführung des materiellen Systems aus dem gegebenen Zustand in den Nullzustand zu verschiedenen Werten der Energie gelangt oder nicht, ebenso wie es vollständig offen gelassen ist, ob jeder äußeren Wirkung ein eindeutig bestimmtes mechanisches Äquivalent entspricht oder nicht.

Einen Einwand, der sich der Brauchbarkeit der gegebenen Definition entgegenstellen läßt, müssen wir hier jedoch noch besonders zur Sprache bringen. Es könnte nämlich sein, daß der Übergang des Systems aus dem gegebenen Zustand in den nach Willkür fixierten Nullzustand überhaupt gar nicht ausführbar ist. Nehmen wir z. B. an, das materielle System bestehe aus einer gewissen Quantität Kohlenstoff, die in dem gegebenen Zustand, dessen Energie bestimmt werden soll, etwa als amorphe Kohle auftritt, während sie im Nullzustand die Modifikation des Diamanten bildet. Hier ist der Übergang in den Nullzustand durch keine experimentellen Mittel vollziehbar,[1]) wenn auch der umgekehrte Übergang möglich ist, und die Definition der Energie versagt von vornherein ihren Dienst. Ja, wir können noch weiter gehen. Es sind sehr wohl Fälle denkbar, wo der Übergang in keinerlei Richtung, weder aus dem gegebenen Zustand in den Nullzustand noch umgekehrt, bewerkstelligt werden kann, während es doch, was natürlich Voraussetzung ist, das nämliche materielle System ist, d. h. die nämlichen chemischen Elemente, das wir in beiden Zuständen vor uns haben. Wählen wir auch hierfür ein bestimmtes Beispiel. Dextrose und Levulose sind zwei chemische Individuen von genau gleicher quantitativer Zusammensetzung, es können also die nämlichen Atome einmal zu Dextrose, einmal zu Levulose

1) [Anm. 1908. Inzwischen hat Moissan die Darstellung des Diamanten aus Kohle gelehrt. Zur Energiemessung ist freilich diese Methode doch nicht brauchbar, und insofern kann das obige Beispiel weiter benutzt werden.]

vereinigt gedacht werden. Doch sind die beiden Verbindungen zurzeit nicht ineinander überführbar, auch läßt sich keine von ihnen aus ihren Elementen synthetisch darstellen, und man kann es daher bei dem jetzigen Stande der Wissenschaft durch keinerlei äußere Mittel, auch nicht durch Zerlegung in die Elemente, möglich machen, das System aus dem einen Zustand in den andern zu bringen. Wäre daher die Energie eines Quantums Dextrose zu bestimmen, bezogen auf dasselbe Quantum Levulose als Nullzustand, so würde die gegebene Definition der Energie vollständig im Stich lassen; diesem Beispiel lassen sich natürlich noch viele andere an die Seite stellen.

Wir können dem erhobenen Einwand auf zwei verschiedene Arten begegnen. Einmal könnten wir uns mit gewissem Recht darauf berufen, daß es sich hier gar nicht um eine wirklich ausführbare Messung des Wertes der Energie handelt, die ja ohnehin niemals mit absoluter Exaktheit angestellt werden kann, und für die wir gleich weiter unten noch andere Methoden finden werden, sondern vielmehr darum, den Sinn des Energiebegriffes hinlänglich klarzustellen, ganz abgesehen davon, ob der Weg, auf dem wir zu diesem Begriff gelangen, nur für die Vorstellung oder auch für das Experiment gangbar ist. Hierzu würde aber gewiß der Nachweis genügen, daß der beschriebene Übergang aus dem gegebenen Zustand in den Nullzustand überhaupt in der Natur möglich ist, d. h. daß die bestehenden Naturkräfte bei geeignetem Zusammenwirken imstande sein würden, den Übergang herbeizuführen. Nun ist zu bedenken, daß das Experimentieren doch nur im mehr oder weniger willkürlichem Kombinieren gewisser Naturkräfte besteht, und daß das Gebiet, auf welches sich diese Kombinationen erstrecken, jedenfalls ein äußerst beschränktes zu nennen ist im Vergleich zu der Mannigfaltigkeit der ohne unser Zutun in der anorganischen und der organischen Welt täglich vonstatten gehenden Wirkungen. Wenn wir auch nicht imstande

sind, nach Belieben amorphe Kohle in Diamant zu verwandeln, so liegt doch nichts im Wege, ja es sprechen viele Analogien dafür, anzunehmen, daß sich, vielleicht durch einen Jahrtausende lang währenden Krystallisationsprozeß, Diamant aus einer Lösung einer gewöhnlichen Kohlenstoffverbindung abscheiden kann, und wenn dies einmal zugegeben ist, so kann man sicher auch von bestimmten äußeren Wirkungen und deren Arbeitswert reden. Jedenfalls ist noch keine Tatsache bekannt, welche uns hindert, zu glauben, daß die Naturkräfte imstande sind, sämtliche Substanzen, auch die organischen und die organisierten Körper, in sämtliche andere überzuführen, wofern sie nur aus den nämlichen chemischen Elementen gebildet sind; weiter brauchen wir nicht zu gehen.

Die prinzipielle Wichtigkeit der hier vorgetragenen Sätze verlangt es indessen, daß wir, um in der Definition des Energiebegriffes auch nicht die kleinste Lücke zu lassen, der Möglichkeit einer wenn auch an und für sich unwahrscheinlichen Annahme Rechnung tragen. In der Tat können wir in jedem Falle, wo aus irgend welchen Gründen unsere Definition nicht zum Ziele führt, uns immer noch auf eine andere Weise helfen, nämlich dadurch, daß wir den betreffenden Fall vorläufig ganz von der Betrachtung ausschließen und die für ihn zu gebende Definition des Energiebegriffes erst bei einer späteren Gelegenheit (S. 113) nachholen, wo wir im Besitze verschiedener Sätze sein werden, welche die Berechnung des Wertes der Energie unter allen Umständen gestatten.

Zu diesen Sätzen gelangen wir durch die Aufstellung des Prinzips der Erhaltung der Energie, das wir nun für alle Fälle, auf welche die Definition der Energie überhaupt Anwendung findet, folgendermaßen aussprechen können: Die Energie eines materiellen Systems in einem bestimmten Zustand, genommen in bezug auf einen bestimmten anderen Zustand als Nullzustand,

hat einen eindeutigen Wert, oder mit anderen Worten, wenn wir den Wortlaut der Definition (S. 104) hier substituieren: Der in mechanischen Arbeitseinheiten gemessene Betrag (das mechanische Äquivalent, der Arbeitswert) aller Wirkungen, welche ein materielles System in seiner äußeren Umgebung hervorbringt, wenn es aus einem bestimmten Zustand auf beliebige Weise in einen nach Willkür fixierten Nullzustand übergeht, hat einen eindeutigen Wert, ist also unabhängig von der Art des Überganges.[1])

Indem wir die Frage nach der Beweisbarkeit dieses Satzes einer anderen Stelle überweisen, wollen wir denselben hier einstweilen als gegeben annehmen und im folgenden zunächst nur den Nachweis führen, daß alle anderen Formen, in denen man das Prinzip darzustellen pflegt, sich aus dieser einen deduzieren lassen und also in ihr enthalten sind.

Zunächst das Prinzip der Unmöglichkeit des perpetuum mobile. Fixieren wir den Nullzustand des materiellen Systems so, daß er mit dem gegebenen, dessen Energie bestimmt werden soll, identisch ist, so haben wir für die Energie den Wert o zu setzen, da es dann offenbar überhaupt keiner äußeren Veränderung bedarf, um von dem ursprünglichen Zustand in den Nullzustand überzugehen. Dieser Wert o

---

1) [Anm. 1908. Dieser Satz enthält zugleich eine bestimmte Vorschrift zur experimentellen Prüfung der Gültigkeit des Energieprinzips in der Natur, anwendbar in allen Fällen, wo ein System auf mehr als eine einzige Weise aus einem bestimmten Zustand in einen anderen bestimmten Zustand gebracht werden kann. Man bringe nämlich das System auf zwei verschiedene Arten aus einem bestimmten Zustand in einen nach Willkür fixierten Nullzustand, und untersuche nun durch geeignete Messungen, ob der Arbeitswert aller äußeren Wirkungen in beiden Fällen der nämliche ist oder nicht. Je nachdem das eine oder das andere zutrifft, ist das Prinzip gültig oder nichtgültig. Daraus folgt, daß das Energieprinzip weder eine Tautologie ist, noch eine verkleidete Definition, noch ein Postulat, noch ein Urteil a priori, sondern ein Erfahrungssatz.]

ist aber eindeutig für jede beliebige Art des Überganges, folglich haben wir den Satz: Das mechanische Äquivalent der Wirkungen, welche ein materielles System in seiner äußeren Umgebung hervorruft, wenn es, von einem bestimmten Zustand ausgehend, auf beliebige Weise verändert wird und schließlich wieder in den Anfangszustand zurückkehrt (kürzer: wenn es einen Kreisprozeß durchmacht), ist = 0. Während dieser Satz, der die Möglichkeit der Konstruktion eines perpetuum mobile ausschließt, mit Notwendigkeit aus dem oben angegebenen Prinzip sich ergibt, so hat er jenes doch seinerseits nicht zur logischen Folge, wie wir gleich jetzt bemerken und später ausführlicher nachweisen werden.

Eine andere Folgerung aus dem Prinzip ergibt sich folgendermaßen. Wir können uns den ganzen Prozeß $A - N$, der das materielle System aus dem Anfangszustand A, durch gewisse Zwischenzustände $B, C, \ldots M$ hindurch in den Endzustand N führt, zerlegt denken in eine beliebige Anzahl aufeinanderfolgender einzelner Prozesse: $A - B$, $B - C, \ldots$, $M - N$, in der Art, daß der Endzustand eines jeden Einzelprozesses, bis auf den letzten, zugleich den Anfangszustand des folgenden bildet. Dann ist offenbar der Arbeitswert der äußeren Wirkungen für den ganzen Prozeß $A - N$ gleich der Summe der auf die Einzelprozesse entfallenden respektiven Beträge, und daraus folgt der Satz: Die Energie des Systems im Zustand A, bezogen auf den Nullzustand N ist gleich der Summe der Energien in den Zuständen $A, B, C, \ldots, M$, bezogen auf die respektiven Nullzustände: $B, C, D, \ldots, N$; oder in leicht verständlicher Bezeichnung:

$$[AN] = [AB] + [BC] + [CD] + \cdots + [MN].$$

Zu diesem Satze fügen wir noch einen zweiten, ebenso einfachen. Nach der soeben abgeleiteten Gleichung in Verbindung mit dem Prinzip der Unmöglichkeit des perpetuum mobile ist:

$$[AN] + [NA] = [AA] = 0.$$

Daraus:

$$[AN] = -[NA]$$

d. h. die Energie des Systems im Zustand A, genommen in bezug auf den Zustand N als Nullzustand, ist gleich und entgegengesetzt der Energie des Systems im Zustand N, genommen in bezug auf den Zustand A als Nullzustand. Für die angewandten Symbole bestehen offenbar ganz die nämlichen Rechnungsgesetze wie für die geometrische Addition von Strecken.

Wir können nun die hier abgeleiteten Sätze zugleich benutzen, um die allgemeine Definition des Energiebegriffs dadurch zu vervollständigen, daß wir sie auch auf diejenigen Fälle ausdehnen, welche bisher von der Betrachtung ausgeschlossen bleiben mußten (S. 110). Ist nämlich der Übergang aus dem Zustand A in den Zustand N nicht ausführbar, wohl aber der von N zu A, wie in dem einen der oben angeführten Beispiele, so definieren wir die gesuchte Energie $[AN]$ als die der Energie $[NA]$ entgegengesetzte Größe, und ist das Verhältnis noch komplizierter, so führen wir beliebige Zwischenzustände B, C, ... ein und zerlegen dadurch den ganzen Übergang von A zu N in eine Reihe Einzelübergänge, welche so gewählt sind, daß sie sich, jeder für sich, entweder in direkter oder in umgekehrter Richtung ausführen lassen. Auf diesem Wege müssen wir durch die Anwendung der angeführten Sätze stets zu einem Ausdruck der Energie gelangen; denn wäre dies nicht der Fall: könnten wir nicht durch Einschiebung entsprechender Zwischenzustände einen Übergang von A zu N sukzessive vermitteln, so hätten wir in diesen beiden Zuständen überhaupt nicht das nämliche materielle System vor uns, dann wäre also die Frage nach dem Werte der Energie von vornherein absurd. — Daß diese Art, die Definition der Energie zu erweitern, nicht etwa eine künstlich herbeigezogene Komplikation des Begriffes in sich birgt, sondern in der Natur der Sache begründet ist,

läßt sich am besten daraus erkennen, daß man bei jeder praktischen Berechnung der Energie des materiellen Systems, z. B. in der Thermochemie, in der Tat gerade auf das Verfahren angewiesen ist, wie es unsere Definition vorschreibt; denn es gibt kein Mittel und keine Methode der Messung, welche gestattet, den Weg zu umgehen, auf dem wir zur Bestimmung des Wertes der Energie gelangt sind. —

Wenn wir die Energie eines materiellen Systems in einem bestimmten Zustand A einmal auf den Zustand N, dann auf einen anderen Zustand N' als Nullzustand beziehen, so folgt aus der Relation:

$$[AN] - [AN'] = [AN] + [N'A] = [N'N],$$

daß die durch die verschiedene Wahl der Nullzustände bedingte Differenz in den Werten der Energie von A durch eine Größe angegeben wird, die gar nicht von den Eigenschaften des Zustandes A, sondern allein von der Beschaffenheit der beiden Nullzustände abhängt. Lassen wir daher bei der Bestimmung der Energie die Wahl des Nullzustandes ganz offen, so wird in dem Ausdruck der Energie nur eine gewisse additive Konstante unbestimmt gelassen.

Wir wollen aber jetzt dem Prinzip noch eine andere Fassung geben, die uns für die künftigen Betrachtungen von größter Wichtigkeit sein wird. Denken wir uns ein materielles System durch irgend einen Prozeß aus einem bestimmten Zustand A in einen anderen Zustand B übergeführt, so ist der Arbeitswert der dabei eingetretenen äußeren Wirkungen in der von uns gebrauchten Bezeichnung gleich $[AB] = [AN] - [BN]$, wobei N einen ganz willkürlich gewählten Zustand des nämlichen Systems darstellt, d. h.: durch den ausgeführten Prozeß ist die Energie des Systems, bezogen auf einen nach Willkür fixierten Nullzustand N, verkleinert worden um den Arbeitswert der hervorgebrachten äußeren Wirkungen, oder, was dasselbe ist, die Energie des Systems ist vergrößert worden um den Arbeitswert der Wir-

kungen, welche außerhalb des Systems verschwunden, verbraucht, aufgewendet worden sind, um die Zustandsänderung zu bewerkstelligen.

Wenn speziell der Prozeß in der Weise vor sich geht, daß in der äußeren Umgebung gar keine Wirkungen stattfinden, dann ist $[AB] = 0$, also $[AN] = [BN]$: die Energie im Zustand A ist gleich der im Zustand B.

Die Energie eines materiellen Systems, in bezug auf einen beliebigen Nullzustand, ändert sich also nicht, wenn bei Ausführung irgend eines Prozesses keine äußere Veränderung eintritt, oder mit anderen Worten: wenn in dem System nur innere Wirkungen stattfinden. In dieser Form stellt sich das Prinzip als das der Erhaltung der Energie dar, und diese Form ist es nun, die durch eine etwas veränderte Auffassung des Begriffes der Energie sich so ungemein bequem für die direkte Anschauung und fruchtbar für die weitere Behandlung erweist. Im bisherigen haben wir nämlich die Energie eines Systems immer als eine Größe betrachtet, deren Begriff wesentlich verknüpft ist mit dem der äußeren Wirkungen, die das System bei irgend einer Veränderung hervorruft; denn nach der Definition wird der Betrag der Energie nur durch diese äußeren Wirkungen gemessen, und wenn man daher der Energie in Gedanken irgend ein materielles Substrat unterlegen will, so hat man dasselbe in der Umgebung des Systems zu suchen; hier allein findet die Energie ihre Erklärung und folglich auch ihre begriffliche Existenz. Solange man von den äußeren Wirkungen eines materiellen Systems ganz abstrahiert, kann man auch von seiner Energie nicht reden, da sie dann nicht definiert ist. In Übereinstimmung mit dieser Auffassung steht die Kirchhoffsche Bezeichnung der Energie als „Wirkungsfunktion". Nun sehen wir andererseits aus der zuletzt abgeleiteten Form des Prinzips, daß die Energie eines Systems konstant bleibt, wenn ein mit ihm ausgeführter Prozeß keine äußeren Wirkungen hervorruft, mögen die inneren Wir-

kungen noch so ausgedehnt und verschiedenartig sein. Dieser Satz führt uns dazu, die in einem System enthaltene Energie als eine begrifflich von den äußeren Wirkungen unabhängig bestehende Größe aufzufassen. Das System besitzt ein gewisses Quantum Energie, das, bei fixiertem Nullzustand, durch den augenblicklichen Zustand vollständig bestimmt ist und jederzeit durch Überführung in den Nullzustand berechnet werden könnte. Dies Quantum bleibt konstant, wird erhalten, solange das System keine Wirkungen nach außen abgibt resp. empfängt, und durch die inneren Wirkungen wird nur seine Form, nicht seine Größe geändert. Nun haben wir uns die Energie als im System selbst befindlich vorzustellen, als eine Art Vorrat (nach C. Neumann: „Kapital"), welcher durch innere Wirkungen unzerstörbar ist, und diese Auffassung ist für die unmittelbare Anschauung überaus bequem durch ihre Analogie mit dem Verhalten der Materie, die auch in verschiedene Formen überführbar, aber nach ihrer Quantität (Masse) unveränderlich ist. Ebenso wie die Gesamtmasse eines Körpers sich als die Summe der Massen der einzelnen in demselben enthaltenen chemischen Substanzen darstellt, so setzt sich die Energie eines Systems zusammen aus der Summation der einzelnen Energiearten, und man kann die Veränderungen und Umwandlungen dieser verschiedenen Arten ebenso bis ins kleinste Detail hinein verfolgen, wie die Veränderungen der Materie, wofür wir in der Folge zahlreiche Beispiele finden werden. Ohne Zweifel beruht zum großen Teil auf dieser Analogie die verhältnismäßig überraschende Leichtigkeit und die sieghafte Klarheit, mit der sich das Prinzip der Erhaltung der Energie binnen weniger Jahre die allgemeine Anerkennung eroberte und in der Überzeugung eines jeden festsetzte.

Man könnte hier die Frage aufwerfen, ob es denn wirklich für die gesunde Weiterentwicklung des Prinzips von Nutzen ist, in dieser Weise von der primären Definition des Begriffes abzuweichen und ihm eine spezielle substanzielle

Deutung zu geben, die doch schließlich nur auf einer Analogie beruht, also an und für sich zu gar keinen Schlüssen berechtigt. In der Tat muß zugegeben werden, daß diese Frage von vornherein durchaus nicht unstatthaft ist, ja, es läßt sich sogar nachweisen, daß gerade durch diese veränderte Auffassung der Begriff der Energie (nicht ihr Wert, der ja durch die allgemeine Definition ein für allemal gegeben ist) etwas Unbestimmtes bekommt. Man denke z. B. an die verschiedenen Deutungen, die man dem Begriff der elektrostatischen Energie eines Systems von geladenen Leitern im Gleichgewichtszustand geben kann. Die einen suchen die Energie in einem Zwangszustand der das Leitersystem umgebenden Dielektrika, räumlich über alle Dielektrika hin erstreckt, die andern in einer Fernewirkung der elektrischen Ladungen der Leiter, auf den Oberflächen der Leiter ausgebreitet. Solange man den Widerstreit der beiden Theorien unentschieden läßt, d. h. sich auf die Betrachtung von Naturvorgängen beschränkt, die durch beide gleich befriedigend erklärt werden, bleibt diese Frage vollständig offen; die Unbestimmtheit liegt dann im Begriff der Energie, man kennt den Platz nicht, den man ihr anweisen soll, und hat auch kein Mittel, ihn zu finden. Wäre man dagegen bei der ursprünglichen Definition stehen geblieben, so hätte man die Energie eben nur als eine bestimmte Zahl, als einen gewissen Arbeitsbetrag, aufzufassen, wobei natürlich jede Unbestimmtheit des Begriffes ausgeschlossen ist.

Indessen ist doch gerade an dem genannten Beispiel, dem später noch andere folgen werden, unverkennbar, daß mit der hier in Rede stehenden substanziellen Deutung des Begriffes der Energie nicht nur eine Vermehrung der Anschaulichkeit, sondern auch ein direkter Fortschritt in der Erkenntnis verbunden ist. Dieser Fortschritt beruht auf der Anregung zur weiteren physikalischen Forschung. Man wird sich nun nicht mehr damit begnügen, den Zahlenwert der Energie des Systems zu kennen, sondern man wird versuchen,

die Existenz der verschiedenen Arten der Energie an den verschiedenen Elementen des Systems im einzelnen nachzuweisen, und den Übergang in andere Formen und zu anderen Elementen ebenso verfolgen, wie die Bewegung eines Quantums Materie im Raum. Sobald man aber auf diese Frage eingeht, nimmt die Unbestimmtheit, die vorher im Begriffe selber lag, die Form eines der Lösung fähigen physikalischen Problems an, und in der Tat steht zu erwarten, daß auf diese Weise, durch Erforschung der Wirkungsart aller in der Natur tätigen Agentien bis ins einzelne, auch die physikalische Bedeutung der Energie eine ganz bestimmte werden wird, so daß wir dann die gesamte Energie eines materiellen Systems als ein Aggregat von lauter einzelnen Elementen ansehen können, deren jedes seinen bestimmten, besonderen Sitz in der Materie hat. Gewiß ist zuzugeben, daß diese (sozusagen materielle) Auffassung der Energie als eines Vorrats von Wirkungen, dessen Menge durch den augenblicklichen Zustand des materiellen Systems bestimmt ist, möglicherweise später einmal ihre Dienste getan haben und einer anderen, allgemeineren und höheren, Vorstellung Platz machen wird: gegenwärtig ist es jedenfalls Sache der physikalischen Forschung, diese Auffassung als die anschaulichste und fruchtbarste überall bis ins einzelne durchzubilden und ihre Konsequenzen an der Hand der Erfahrung zu prüfen; es läßt sich in dieser Richtung, wie wir später sehen werden, noch mancher neue Gesichtspunkt auffinden.

Indem wir uns nun an die Aufgabe machen, diese Durchführung systematisch ins Werk zu setzen, wobei wir zugleich auch die für die Anwendung bequemsten Formen des Prinzips kennen lernen werden, gehen wir aus von der Betrachtung eines beliebigen in der Natur mit irgend einem materiellen System vor sich gehenden Prozesses. Ein solcher Prozeß besteht immer in einer Reihe von Veränderungen, die das System erleidet, und zwar können wir hierbei immer zwei Fälle unterscheiden. Entweder: die in dem System statt-

findenden Veränderungen sind vollkommen unabhängig von der äußeren Umgebung, in der sich das System befindet, so daß der Prozeß genau ebenso verlaufen würde, wenn man sich alle nicht zum System gehörige Materie aus dem Raum entfernt denkt, — in diesem Falle sprechen wir nur von inneren Wirkungen. Oder: der Verlauf des Prozesses ist wesentlich beeinflußt durch das Vorhandensein äußerer Körper — dann haben wir außer den etwaigen inneren Wirkungen auch äußere mit in Betracht zu ziehen. Es ist klar, daß dieser Unterschied zwischen inneren und äußeren Wirkungen kein absoluter ist, sondern wesentlich abhängt von der Wahl des materiellen Systems: wir können jede äußere Wirkung dadurch zu einer inneren machen, daß wir die Körper, in denen oder zwischen denen sie stattfindet, mit in das System einbegriffen denken, und werden es daher, für einen beliebig angenommenen Prozeß, durch gehörige Ausdehnung des Systems immer erreichen können, daß alle Veränderungen sich als innere Wirkungen darstellen. Streng genommen gibt es zwar überhaupt keinen Prozeß, der nur in inneren Wirkungen besteht, da ja sämtliche Körper des Weltalls in steter Wechselbeziehung miteinander stehen, so daß, wie weit hinaus wir unser materielles System auch erstrecken mögen, es immer noch außerhalb desselben Materie geben wird, welche eine Wirkung darauf ausübt. Indessen: überall, wo es auf Zahlen ankommt, genügt es, nur diejenigen Größen in Betracht zu ziehen, welche oberhalb einer gewissen kleinen Grenze liegen, so daß wir tatsächlich bei jeder Naturerscheinung trotz der Ausschließung einer unendlichen Anzahl von Körpern es immer werden dahin bringen können, nur innere Wirkungen untersuchen zu müssen. Diese Wahl des Systems wollen wir uns für die nächstfolgenden Betrachtungen immer vollzogen denken, so daß wir zunächst stets nur von inneren Wirkungen zu reden haben.

Für diesen Fall spricht sich das Prinzip der Erhaltung der Energie nach S. 115 in der Form aus, daß die Energie

des Systems eine konstante, mit der Zeit unveränderliche Größe ist. Bezeichnen wir also den Zustand des Körpersystems zur Zeit des Beginns der Veränderungen als Anfangszustand, einen anderen, in endlicher oder unendlich kleiner Zeit darauffolgenden als Endzustand des Prozesses, so ist die Energie des Systems im Anfangszustand gleich der im Endzustand, oder: die Differenz der Energien im Anfangs- und Endzustand ist gleich 0. Um nun diesen Satz mit Vorteil anwenden zu können, ist es nötig, den allgemeinen Ausdruck der Energie des Systems zu kennen. Die Energie ist aber, wie wir wissen, durch den augenblicklichen Zustand des Systems, bis auf eine additive Konstante, vollständig bestimmt, sie muß sich also als eine eindeutige Funktion derjenigen Größen darstellen lassen, welche diesen Zustand bestimmen. Es handelt sich daher jetzt vor allem um die Frage: Welches sind die Größen, die den Zustand eines materiellen Systems bestimmen? und diese Frage führt zu einer näheren Erörterung des Zustandbegriffes überhaupt.

Beschränkt man sich auf die Betrachtung von Bewegungserscheinungen, so läßt sich der Zustand eines Systems von materiellen Punkten bezeichnen als der Inbegriff der Lagen und der Geschwindigkeiten aller Punkte des Systems. Die Bestimmungsstücke des Zustandes sind also die Raumkoordinaten der Punkte und ihre ersten Differenzialquotienten nach der Zeit, von diesen Größen allein hängt die Energie des Systems ab; wenn sie gegeben sind, ist überhaupt der ganze Verlauf der Bewegung, mithin alle Variabeln des Systems als Funktionen der Zeit bestimmt. Für beliebige physikalische Erscheinungen reicht aber diese Definition des Zustandes nicht aus, und wir wollen daher allgemeiner folgendermaßen definieren: „Der Zustand eines materiellen Systems in einem bestimmten Zeitpunkt ist der Inbegriff aller derjenigen Größen, durch deren augenblicklichen Wert der ganze zeitliche Verlauf des in dem System stattfindenden Prozesses vollständig bestimmt ist.“ (Äußere Wirkungen sind

hier ja ausgeschlossen.) Die Energie des Systems erscheint dann als eine bestimmte Funktion dieser Größen.

Zu diesen „Bestimmungsstücken des Zustands" (kurz: „Zustandsgrößen") gehören, außer den schon erwähnten auf die Mechanik bezüglichen Variabeln, die Temperatur, die elektrische und magnetische Dichte, die galvanische Stromintensität usw. Ausgeschlossen dagegen sind Größen wie die Beschleunigung, die Geschwindigkeit der Temperaturänderung usw., denn diese Größen sind immer schon durch die Vorigen mitbestimmt, ihre Kenntnis ist also nicht mehr erforderlich für die Bestimmung des zeitlichen Verlaufs eines Prozesses. Dies gilt auch dann, wenn, wie beim Weberschen elektrischen Grundgesetz, die Kraft außer von der Lage und der Geschwindigkeit auch noch von der Beschleunigung abhängig gesetzt wird; denn da andrerseits die Kraft proportional der Beschleunigung angenommen wird, [1]) erhält man schließlich doch immer eine Relation, welche die Beschleunigung ein für alle Mal auf Lage und Geschwindigkeit zurückführt, so daß sie niemals willkürlich gegeben werden darf, — ein Punkt, der manchmal übersehen worden ist.

Im allgemeinen werden die Zustandsgrößen alle voneinander unabhängig sein, so daß man, um den Zustand vollständig angeben zu können, den Wert jeder einzelnen dieser Variabeln kennen muß; indessen kommt es doch auch häufig vor, daß durch feste, von vornherein gegebene Bedingungen eine Anzahl von Relationen zwischen diesen verschiedenen Größen vorgeschrieben ist, welche einige derselben als abhängig von den übrigen erscheinen lassen. Einen solchen Fall haben wir z. B. in der Mechanik, wenn zwischen den Koordinaten der beweglichen Punkte bestimmte

1) W. Weber: Elektrodynamische Maßbestimmungen, insbesondere über das Prinzip der Erhaltung der Energie. Abh. d. k. sächs. Ges. d. Wiss. X. Nr. 1, p. 1, 1871. Vgl. auch IX, p. 573, 1864.

Bedingungsgleichungen bestehen, also wenn etwa zwei Punkte miteinander durch eine Gerade von konstanter Länge verbunden sind. Dann sind offenbar Lagen und Geschwindigkeiten nicht voneinander unabhängig, sondern der Zustand ist schon durch weniger Variabeln bestimmt, als wenn die Punkte vollkommen frei sind.

Ähnliche Fälle treffen wir oft an bei anderen Prozessen. So z. B. stellt das Ohmsche Gesetz in seiner Anwendung auf den stationären Strom einer galvanischen Batterie eine solche Relation zwischen Zustandsgrößen dar. Die elektromotorische Kraft der Kette (Summe der elektrischen Spannungen je zweier sich berührender Leiter), der Widerstand und die Stromintensität sind alles Zustandsgrößen, im allgemeinen müssen daher die Werte aller drei Größen unabhängig voneinander gegeben sein, wenn der augenblickliche Zustand des ganzen den Strom leitenden Körpersystems bestimmt sein soll; nur die von vornherein gestellte Bedingung, daß der Zustand stationär ist, führt eine Abhängigkeit dieser Größen voneinander herbei, so daß eine derselben durch die beiden andern bestimmt erscheint. Läßt man aber diese Bedingung fallen, so hindert nichts, anzunehmen, daß in einem Augenblick eine Stromintensität besteht, die dem von dem Ohmschen Gesetz für den stationären Zustand geforderten Wert nicht entspricht, ja, so lange sie nicht besonders gegeben ist, darf man den Zustand gar nicht als bestimmt annehmen; es wird dann im allgemeinen die Stromintensität nicht konstant bleiben, sondern sich in gewisser Weise verändern, um eventuell in den stationären Zustand überzugehen. Dies zeigt sich z. B. bei der Erscheinung des allmählichen Ansteigens eines Stromes von dem Augenblick an, wo die Leitung geschlossen ist; die Intensität wächst dann in kürzerer oder längerer Zeit von 0 auf ihre konstante Höhe. — In seiner Allgemeinheit genommen spricht aber das Ohmsche Gesetz durchaus keine Beziehung zwischen Zustandsgrößen aus, da der allgemeine Ausdruck der elektro-

motorischen Kraft ein Glied enthält, das von der Induktion des eigenen oder eines fremden Stromes herrührt, und dieses Glied enthält seinerseits den Differenzialquotienten der Stromintensität nach der Zeit, der nicht zu den Zustandsgrößen gehört.

Betrachten wir noch ein weiteres Beispiel: die temporäre Magnetisierung. Setzt man der gebräuchlichen, von Poisson begründeten, Theorie zufolge in einem magnetisch induzierten Körper, z. B. weichem Eisen, das magnetische Moment proportional der magnetisierenden Kraft, so erhält man damit wieder eine Relation zwischen lauter Zustandsgrößen; denn auch die magnetische Kraft läßt sich ja unmittelbar durch den magnetischen Zustand des Körpers und der Umgebung ausdrücken. Aber andrerseits ist auch bekannt, daß diese Relation nur einem gewissen, nach Ablauf einer endlichen Zeit eingetretenen Zustand, nämlich dem magnetischen Gleichgewichtszustand entspricht, und daß man, falls diese Zeit mit in Rechnung gebracht wird, sehr wohl von einem Zustand ausgehen kann, in dem das magnetische Moment noch nicht den Wert erreicht hat, den es zufolge einer bestimmten magnetisierenden Kraft im Gleichgewichtszustand annehmen würde. Überhaupt ist ersichtlich, daß jeder stationäre und jeder Gleichgewichtszustand eine besondere Bedingungsgleichung zwischen Zustandsgrößen involviert.

Was nun diese in gewissen Fällen eintretende Abhängigkeit der Zustandsgrößen voneinander für unsere Betrachtungen so wichtig macht, ist der Umstand, daß sich in jedem solchen Falle der Ausdruck der Energie in *verschiedene Formen* bringen läßt und dadurch gerade zu der schon S. 117 angegebenen Unbestimmtheit des Begriffes Veranlassung gibt. Sehen wir nämlich jetzt zu, wie man in einem bestimmten vorgelegten Falle, für ein gegebenes materielles System in einem bestimmten Zustand, zu dem Ausdruck der Energie gelangt. Zunächst ist daran festzu-

halten, daß der Zahlenwert dieser Größe, wie er aus der allgemeinen Definition hervorgeht, stets eindeutig bestimmt ist; man findet ihn aus den Vorschriften der Definition, dadurch daß man erst nach Willkür einen Nullzustand fixiert und dann auf die angegebene Weise den Arbeitswert der äußeren Wirkungen mißt, welche durch den Übergang in den Nullzustand hervorgerufen werden. Ist der Zahlenwert für einen bestimmten Fall gefunden, so hat man damit natürlich noch nicht den allgemeinen Ausdruck der Energie des Systems in seiner Abhängigkeit von den Zustandsgrößen, sondern muß nun weiter untersuchen, wie sich der gefundene Zahlenwert ändert, wenn die Bestimmungsstücke des Zustands variiert werden. Diese Untersuchung fällt unter die allgemeine Aufgabe jeder experimentellen Forschung, bei der es sich darum handelt, die quantitative Abhängigkeit einer Erscheinung von einer andern durch Versuch festzustellen. Gesetzt nun, es sei das Gesetz dieser Abhängigkeit gefunden, so wird man die Energie des Systems als Funktion der Zustandsgrößen ausdrücken können, und hat so die Aufgabe gelöst.

Doch werden eben hier zwei Fälle zu unterscheiden sein. Wenn die Zustandsgrößen wirklich auf alle mögliche Weise variiert waren, so läßt sich der Wert der Energie nur auf eine einzige Art als Funktion dieser Größen darstellen, da dann die Variabeln alle voneinander unabhängig sind. Diese Funktion wollen wir im folgenden den „primären" Ausdruck der Energie nennen, er hat allgemeine und unbedingte Geltung. Oftmals wird es aber vorkommen, daß man nicht von allen möglichen Wertkombinationen der Zustandsgrößen ausging, sondern etwa nur von Gleichgewichts- oder stationären oder überhaupt solchen Zuständen, deren Mannigfaltigkeit, wie vorher geschildert, durch eine oder mehrere Bedingungsgleichungen zwischen den Zustandsgrößen eingeschränkt ist. In jedem solchen Falle ist der Ausdruck der Energie als Funktion der Zustandsgrößen

nicht eindeutig bestimmt, sondern kann, mit Benutzung jener Bedingungsgleichungen, in verschiedene Formen gebracht werden, indem irgend eine Variable durch irgend welche andere ersetzt wird; dann ist auch die Entscheidung über die Form des primären Ausdrucks der Energie unmöglich und bleibt es, solange man sich auf die betrachteten Zustände beschränkt. Wir sehen also hieraus unter anderem, daß die Berechnung der Energie aus Gleichgewichts- oder auch nur stationären Zuständen niemals zum primären Ausdruck derselben führen kann, wie sich dies schon aus dem S. 117 angeführten Beispiel eines elektrostatischen Gleichgewichtszustandes ersehen läßt. Hier ist in der Tat heutzutage noch nicht mit Bestimmtheit entschieden, welche der beiden angegebenen Formen den primären Ausdruck der Energie darstellt, und man kann bis dahin nach Willkür jede derselben als die primäre betrachten.[1]) Ähnliches gilt von den anderen S. 121 f. angeführten Fällen. Nehmen wir z. B. einen stationären galvanischen Strom von der Intensität i, der elektromotorischen Kraft e, dem Gesamtwiderstand w, dann läßt sich die in dem Widerstand w in der Zeiteinheit erzeugte Joulesche Wärme auf verschiedene Weise ausdrücken: durch $i^2 w$ oder durch $e \cdot i$ oder auch durch $\frac{e^2}{w}$. Welcher von diesen Werten als der primäre Ausdruck der Wärmeerzeugung anzusehen ist, läßt sich erst dann entscheiden, wenn man von stationären Strömen zu nichtstationären übergeht, d. h. die Bedingung aufgibt, welche hier die Zustandsgrößen aneinander knüpft; man findet dann, daß allein $i^2 w$ den gesuchten primären Ausdruck darstellt.

Wir wollen noch einen anderen ebenfalls hierher ge-

---

1) [Anm. 1908. Inzwischen ist bekanntlich die erste der beiden Formen als die primäre festgestellt worden, und zwar in der Tat durch die Untersuchung dynamischer Vorgänge, nämlich der Hertzschen Wellen.]

hörigen Fall zur Sprache bringen, der die Bestimmung der Energie eines elastischen Körpers betrifft. Wenn ein vollkommen elastischer, fester oder flüssiger Körper vermöge der ihm innewohnenden Kräfte Bewegungen (Schwingungen) vollführt, ohne daß er dabei von außen irgend eine Einwirkung, die mit Arbeitsleistung verbunden ist, erfährt, so ist nach unserem Prinzip seine Energie von der Zeit unabhängig. Nehmen wir nun weiter an, die Bewegung sei derart, daß etwaige Temperaturdifferenzen, die in ihrem Verlauf durch die Deformationen entstehen, nicht durch Wärmeleitung zur Ausgleichung kommen, wie man das z. B. bei Schallschwingungen in der Regel voraussetzen kann, so ist der augenblickliche Zustand des Körpers immer schon bestimmt durch Lage (Deformation) und Geschwindigkeit aller seiner Teilchen, insbesondere hängt die Temperatur eines Teilchens nur von seiner Deformation ab, und es kann daher auch der Wert der Energie als Funktion von Lage und Geschwindigkeit allein dargestellt werden. Da nun die Geschwindigkeit immer in der Form der lebendigen Kraft in dem Ausdruck der Energie enthalten ist, so ziehen wir aus der Unveränderlichkeit der Gesamtenergie den Schluß, daß die Summe der lebendigen Kraft und einer gewissen Funktion der Deformation während der ganzen Bewegung konstant ist. Diese Funktion der Deformation führt bekanntlich den Namen Kräftefunktion oder Potenzial der elastischen Kräfte, sie stellt diejenige Energieart vor, welche durch die Gesamtheit der Deformationen bedingt ist. Indes ist zu bedenken, daß diese Form des Wertes der Energie nicht aus dem allgemeinsten Zustand des Körpers abgeleitet ist, sondern nur aus solchen Zuständen, die dadurch auseinander hervorgehen, daß man die Wärmeleitung ausschließt. Wir haben also hier wieder den Fall einer Bedingung zwischen den Zustandsgrößen, und in der Tat läßt sich leicht zeigen, daß die Kräftefunktion nicht den primären Ausdruck der Energie bildet; sie verliert daher ihre Be-

deutung, wenn man die hier gemachte Beschränkung aufhebt und zur Betrachtung allgemeinerer Zustände übergeht.

Am klarsten tritt dies hervor bei den Bewegungen sogenannter vollkommener Gase, weil für sie der primäre Ausdruck der Energie allgemein bekannt ist. Betrachten wir einmal ein solches Gas, welches Schwingungen ausführt, etwa bei konstantem Gesamtvolumen, damit äußere Wirkungen ausgeschlossen bleiben, und berechnen wir zunächst seine Kräftefunktion unter der oben gemachten Voraussetzung, daß keine Wärmeleitung im Innern stattfindet. Dann ist der Druck p eines Massenteilchens vollständig bestimmt durch sein Volumen v, es ist nämlich:

$$p = \frac{C}{v^{\frac{c_p}{c_v}}},$$

wobei C eine von der Natur des Gases abhängige Konstante, c_p und c_v die beiden spezifischen Wärmen bedeuten, und die Kräftefunktion nimmt den Wert an:

$$-\int p\,dv = \frac{1}{\frac{c_p}{c_v} - 1} \cdot \frac{C}{v^{\frac{c_p}{c_v} - 1}} + \text{const.}$$

Zufolge dem Prinzip der Erhaltung der Energie ist dann die Summe der gesamten lebendigen Kraft der Schwingungen und der über alle Massenteile erstreckten Kräftefunktion von der Zeit unabhängig. Die Kräftefunktion bildet nun aber nicht den primären Ausdruck der Energie, derselbe lautet vielmehr für die Masseneinheit: $c_v \cdot T + \text{const.}$, ganz unabhängig vom Volumen. Hierbei ist T die absolute Temperatur, c_v ist auf mechanisches Arbeitsmaß bezogen. Wir können also jedenfalls den nämlichen Satz auch für den Fall aussprechen, daß wir statt der Kräftefunktion den Ausdruck $c_v \cdot T + \text{const.}$ einsetzen. In der Tat überzeugt man sich unmittelbar, daß unter den hier angenommenen Bedingungen diese beiden Ausdrücke gleichwertig sind, da

$$\frac{1}{\frac{c_p}{c_v}-1}\cdot\frac{C}{\frac{c_p}{v^{c_v}}-1}=c_v\cdot T;$$

denn mit Benutzung des obigen Wertes von p erhalten wir hieraus:

$$\frac{1}{c_p-c_v}\cdot pv=T,$$

eine Gleichung, die ganz allgemein für jeden Zustand eines vollkommenen Gases gilt.

So lange man an der hier betrachteten Art der Bewegungen festhält, ist es vollständig gleichgültig, welche der beiden Formen der Energie man der Rechnung und Anschauung zugrunde legt; die erstgenannte hat sogar den Vorzug, daß man bei ihr die Änderungen der Temperatur gar nicht zu berücksichtigen braucht; daher bedient man sich ihrer meistens in der Elastizitätslehre. Sobald aber die gemachte Beschränkung durchbrochen wird, ist es notwendig, auf den primären Ausdruck der Energie zurückzugreifen.

Da, wie wir gesehen haben, die Gewinnung der primären Form der Energie an die Aufhebung einer jeden beschränkenden Bedingung zwischen den Zustandsgrößen geknüpft ist, so kann man niemals behaupten, daß wir uns wirklich im Besitze dieser primären Form befinden; denn wir sind keineswegs sicher, ob die Zustände, mit denen wir operieren, in der Tat die allgemeinsten sind. So pflegen wir z. B. als primären Ausdruck der Energie zweier gegeneinander gravitierender Massen das Produkt dieser Massen, dividiert durch ihren Abstand, anzusehen, — eine Auffassung, die aus der Vorstellung einer unmittelbaren Fernewirkung entspringt. Es wäre aber sehr wohl denkbar, und in Anbetracht der Richtung, welche die Entwicklung der physikalischen Theorien in jüngster Zeit genommen hat, sogar nicht unwahrscheinlich, daß man einmal von dieser Vorstellung einer unvermittelten, momentan in die Ferne wirken-

den Anziehungskraft abgeht und an ihre Stelle eine Wirkung substituiert, die sich in meßbarer Zeit durch das Zwischenmedium vermittels einer eigentümlichen Deformation desselben von Teilchen zu Teilchen fortpflanzt. Sollte diese Anschauung wirklich einmal Platz greifen, so könnten wir den bisher gebrauchten Ausdruck der Energie nicht mehr als den primären betrachten, seine Gültigkeit ist an die Bedingung geknüpft, daß die von der einen Masse ausgehende Wirkung bei der andern bereits angelangt ist, und sich im Zwischenmedium ein stationärer Zustand gebildet hat. Dieser Zustand ist dann aber nicht mehr der allgemeinste, und in der Tat würde dann der primäre Ausdruck der Energie seine Form ändern und sich als ein Integral darstellen, das über das gesamte Zwischenmedium zu erstrecken ist. Selbstverständlich bleibt diese Frage so lange offen und jeder der beiden Ausdrücke der Energie gleich berechtigt, als man auf die Untersuchung eines solchen allgemeineren Zustandes verzichtet. Wie anregend die Frage nach dem primären Ausdruck der Energie auf die Forschung nach neuen Erscheinungen wirkt, darauf haben wir schon oben (S. 117 f.) aufmerksam gemacht.

Wir wollen nun für das folgende die Annahme machen, daß uns der primäre Ausdruck der Energie bekannt ist, soweit eben die Allgemeinheit der von uns betrachteten Zustände reicht. Überall, wo dies nicht mit Sicherheit der Fall ist, beschränken wir lieber vorläufig jene Allgemeinheit; wenn wir uns z. B. mit der Betrachtung von Gleichgewichtszuständen der Elektrizität begnügen, dürfen wir es ganz unentschieden lassen, ob die elektrostatische Energie mit Faraday-Maxwell im Innern des Dielektrikums oder mit Coulomb-Weber auf der Oberfläche der Leiter zu suchen ist, und nach Belieben jeden der entsprechenden Ausdrücke als den primären betrachten. Im übrigen wollen wir uns das zugrunde liegende materielle System in möglichst mannigfaltigen Umständen befindlich

vorstellen: es mögen sich darin bewegte und ruhende Körper befinden, wärmere und kältere, leuchtende und dunkle, Leiter und Nichtleiter, elektrische, von Strömen durchflossene und magnetische Körper, kurz, es mögen alle nur denkbaren physikalischen Erscheinungen in dem System vertreten sein. Dann zeigt sich zunächst die merkwürdige Tatsache, daß der primäre Ausdruck der Energie in der Form einer Summe auftritt, deren einzelne Glieder aus bestimmten, den einzelnen besonderen Erscheinungsformen entsprechenden Zustandsgrößen zusammengesetzt sind. Somit zerfällt der Wert der gesamten Energie von selber in eine Anzahl von Einzelenergien, die untereinander unabhängig sind, und deren jede in besonderer Weise aus einer einzelnen Eigenschaft des betrachteten Zustandes hervorgeht. Dadurch werden wir veranlaßt, in dem System verschiedene Arten von Energie zu unterscheiden, so eine mechanische, eine thermische, eine chemische, eine elektrische, eine magnetische Energie; durch Summation derselben erhalten wir daraus die Gesamtenergie des Systems.

Diese Tatsache, welche wir als das Prinzip der Übereinanderlagerung (Superposition) der Energien bezeichnen können, hängt wesentlich mit dem Umstand zusammen, daß viele in der Natur auftretende Erscheinungen gänzlich unabhängig voneinander verlaufen: die Erwärmung eines Körpers ändert seine Schwere nicht, eine elektrostatische Ladung bleibt ohne Einfluß auf den Magnetismus, usw., mag man nun diesen Umstand als die Ursache oder als die Folge jener Tatsache betrachten. Wir wollen das Prinzip der Übereinanderlagerung der Energien, welches die Verallgemeinerung einer ganzen Reihe in der Physik wohlbekannter Sätze ausspricht, hier einfach als durch die Erfahrung gegeben hinnehmen, es wird uns bei der ferneren Behandlung unserer Aufgabe ein äußerst wertvolles Hilfsmittel für die Erschließung weiterer Folgerungen aus dem Erhaltungsprinzip abgeben.

Um die Übersicht über die einzelnen Glieder jener Energiensumme zu erleichtern, hat man nach verschiedenen Gesichtspunkten Einteilungen derselben vorgenommen, so außer der bereits von uns erwähnten, die auf die Verschiedenartigkeit der einzelnen Naturerscheinungen basiert ist und wohl als die zunächstliegende gelten kann, die Einteilung in zwei Summanden: Aktuelle und potenzielle Energie (Energie der Bewegung und der Lage, S. 77). Diese Einteilung beruht auf der Voraussetzung, daß alle Veränderungen in der Natur mechanischer Beschaffenheit sind, sie rechnet alle Glieder, die nur von den Geschwindigkeiten abhängen, zur aktuellen Energie, alle, die nur von den Lagen abhängen, zur potenziellen Energie. Seitdem man allerdings gefunden hat, daß es auch Energiearten gibt, die durch Lage und Geschwindigkeit zugleich bestimmt sind, ist die Art der Anwendung dieser Einteilung etwas zweifelhaft geworden. Das ist z. B. der Fall bei der sogenannten elektrokinetischen Energie eines galvanischen Stromes, die nicht nur von der Intensität des Stromes, sondern auch von der relativen Lage der einzelnen Stromelemente abhängig ist; ob diese Energie als aktuelle oder als potenzielle angesprochen werden muß, läßt sich von vornherein nicht klar ersehen, gewöhnlich geschieht allerdings das Erstere (vgl. 3. Abschnitt). Im Grunde kommt natürlich nichts darauf an, da der Wert der Gesamtenergie von dieser Verschiedenheit der Auffassung unberührt bleibt. Eine andere Einteilungsart liefert die Unterscheidung zwischen äußerer und innerer Energie, wobei man unter äußerer Energie im wesentlichen dasselbe versteht wie unter mechanischer Energie im engeren Sinn (Energie der molaren Bewegung), unter innerer Energie aber den Rest der gesamten Energie. Wieder nach einem anderen Gesichtspunkt, nämlich nach der Möglichkeit der unmittelbaren Verwandlung in mechanische Arbeit, hat Helmholtz in neuerer Zeit die Einteilung in freie und gebundene Energie vorgenommen.

Indem wir die Besprechung der einzelnen Energiearten dem letzten Abschnitt dieser Schrift überweisen, wollen wir hier zunächst nur auf die Bequemlichkeit hindeuten, welche aus der Gültigkeit des Prinzips der Superposition der Energien für die Anschauung des Begriffes und für die Berechnung des Wertes der Gesamtenergie erwächst. Hiernach können wir uns die Gesamtenergie des Systems als einen durch einfaches Aneinanderreihen der Einzelenergien entstandenen Vorrat vorstellen, gerade so wie das Gesamtgewicht eines Körpers aus dem Aufeinanderhäufen der einzelnen in ihm enthaltenen chemischen Elemente hervorgeht. Dabei kann die Größe jeder einzelnen Energieart für sich allein berechnet werden, ganz unabhängig von anderen Eigenschaften des betrachteten Systems, wenn man nur die speziellen Zustandsgrößen kennt, die ihr entsprechen. Wir kommen so dazu, jeder Energieart in Gedanken ihren besonderen Platz in der Materie anzuweisen und erreichen dadurch den praktischen Vorteil einer erleichterten Übersicht über die einzelnen Energiearten, die uns vor dem Fehler bewahrt, eine derselben bei der Berechnung der Gesamtenergie außer Acht zu lassen. Im allgemeinen entspricht jeder in dem System wirksamen Kraft, oder überhaupt jeder besonderen Eigenschaft des Systems eine besondere Energieart, die man sich an derjenigen Stelle befindlich vorstellen mag, an welcher jene Eigenschaft zur Erscheinung kommt.

Wenn in dem System nur solche Kräfte tätig sind, die nur in unmeßbar kleinen Entfernungen wirken, so wird die Wirkung auf irgend ein materielles Teilchen nur abhängig sein von dem Zustand dieses Teilchens selber, resp. seiner unmittelbaren Umgebung, und man erhält dann die Energie des Systems einfach durch Summation der Energien aller materiellen Teilchen desselben. Wesentlich anders ist es aber, wenn Kräfte vorkommen, die unmittelbar in die Ferne wirken, da die durch eine solche Kraft bedingte Energie

im allgemeinen von denselben Größen abhängen wird, wie die Kraft selber, also namentlich von der Entfernung der beiden aufeinander wirkenden Elemente. In diesem Fall ist die Energie ihrem Begriffe nach in der gleichzeitigen Lage der beiden Elemente begründet, ihr Sitz befindet sich also nicht an einer einzigen Stelle im Raum, und man kann nicht mehr die Gesamtenergie des Systems gleich der Summe der Energien der einzelnen materiellen Elemente setzen, vielmehr hat man zu dieser Summe noch diejenigen Energiearten hinzuzufügen, die durch die Fernwirkungen je zweier Elemente bedingt sind.

Gesetzt nun, wir hätten den Ausdruck der Gesamtenergie als Summe der einzelnen Energiearten gefunden, so haben wir ihren Wert für jede Veränderung des Systems unabhängig von der Zeit zu setzen, während die einzelnen Energiearten ihre Größe auf gegenseitige Kosten verändern können; es läßt sich also jeder Prozeß, der in der Natur vor sich geht, auffassen als eine Umwandlung einzelner Energiearten ineinander, während ihre Summe, der gesamte im System vorhandene Vorrat von Energie, weder vermehrt noch vermindert werden kann. —

Wir wollen nun um einen Schritt weiter gehen. Die bisherigen Betrachtungen bezogen sich nur auf Veränderungen des Systems, die lediglich von inneren Wirkungen herrühren, während die nicht zum System gehörige Materie gar keinen Einfluß auf dasselbe ausübte. Würde sich die Anwendung des Prinzips nur auf diesen Fall erstrecken, so könnte man verhältnismäßig wenig Nutzen aus ihm ziehen; denn es liefert dann nur eine einzige Gleichung, eben die, welche die Konstanz der Energie ausspricht. Zudem müßte man bei einem gegebenen Prozeß, um alle äußeren Wirkungen auszuschließen, im allgemeinen stets eine beträchtliche Anzahl von Körpern in das System mit einbegreifen, dadurch würde die Zahl der den Zustand bestimmenden Größen eine bedeutende, und die eine Gleichung des Prinzips der Er-

haltung der Energie würde hier wenig leisten. Wir wollen nun aber zeigen, daß wir für irgend einen in einem materiellen System vor sich gehenden Prozeß im allgemeinen nicht nur eine, sondern unendlich viele Gleichungen aus dem Prinzip herleiten können, so daß uns dasselbe oft dazu dienen kann, den ganzen zeitlichen Verlauf des Prozesses eindeutig zu bestimmen.

Hier zeigt sich die Analogie unseres Prinzips mit dem der Erhaltung der Materie in ihrer ganzen Fruchtbarkeit. Die Summe der in der Natur enthaltenen ponderabeln Massen ist unveränderlich, doch wechseln sie ihre Lage im Raum; betrachten wir also ein bestimmt abgegrenztes Raumvolumen, so ist die darin enthaltene Masse im allgemeinen nicht konstant, sondern die Änderung (Zunahme) dieser Masse in einem gewissen Zeitraum ist gleich der in dieser Zeit von außen in das Volumen eingetretenen Masse. Einen ganz ähnlichen Satz leiten wir für die Energie eines materiellen Systems ab. Ebenso nämlich, wie die Materie ihre Lage im Raum wechselt, während ihre Summe konstant bleibt, so wechselt die Energie ihre Lage und ihre Form in der Materie, so daß wir folgende Betrachtung anstellen können. In einem materiellen System, das keinen äußeren Wirkungen ausgesetzt ist, bleibt die Energie konstant. Greifen wir aber aus dem System einen beliebigen Komplex materieller Elemente heraus und betrachten sie als ein besonderes System, so wird dasselbe auch seine besondere Energie haben, die nach dem Muster des Ausdrucks der Energie des Gesamtsystems gebildet werden kann. Diese Energie wird im allgemeinen nicht konstant bleiben, sie würde es nur dann sein, wenn das betrachtete System im Verlaufe des Prozesses gar keine Wirkungen von außen erlitte, was im allgemeinen nicht der Fall sein wird; daher ändert sich die Energie, und zwar eben nach Maßgabe der äußeren Wirkungen. Durch die äußeren Wirkungen wird also Energie von außen in das System hineingeschafft (transferiert), in

einem Betrage, der angegeben wird durch den auf S. 114 f. entwickelten Satz: Die einer bestimmten Zustandsänderung eines materiellen Systems entsprechende Änderung der Energie ist gleich dem Arbeitswert der Wirkungen, welche außerhalb des Systems aufgewendet worden sind, um die Zustandsänderung zu bewerkstelligen. Natürlich ist in diesem Satz der frühere als spezieller Fall mit enthalten, da, wenn keine äußeren Wirkungen stattfinden, auch keine Energie in das System übergeführt werden kann.

Die angezogene Analogie mit der Veränderung der ein bestimmtes Raumvolumen erfüllenden Materie reicht aber nur bis zu einer gewissen Grenze, die darin liegt, daß die gesamte in einem Raum befindliche Masse gleich der Summe der in den einzelnen Raumteilen enthaltenen Massen ist, während ein ähnlicher Satz für die in einem materiellen System enthaltene Gesamtenergie nicht existiert, wenigstens dann nicht, wenn die actio in distans zugelassen wird (S. 132 f.). Die Energie eines Systems enthält vielmehr außer der Summe der Energien der einzelnen materiellen Teile noch andere Energiearten, und dadurch wird ihr Verhalten ein wenig komplizierter.

Wenn nun durch einen gegebenen Prozeß ein materielles System eine gewisse Zustandsänderung erleidet, so kann man sich die Berechnung des Arbeitswertes der dabei aufgewendeten äußeren Wirkungen oft wesentlich erleichtern durch die Überlegung, daß dieser Arbeitswert ganz unabhängig ist von dem Wege, auf welchem die Zustandsänderung herbeigeführt wird, daß man also statt des gegebenen Prozesses und statt der gegebenen äußeren Wirkungen beliebige andere substituieren kann, wenn sie nur die gleiche Zustandsänderung des Systems veranlassen; denn dann ist auch der gesuchte Arbeitswert wieder der gleiche. Betrachten wir hierfür ein Beispiel aus der Mechanik. Die Energie eines in Bewegung begriffenen starren Körpers ist seine lebendige Kraft; dieselbe bleibt konstant, so lange keine

äußeren Wirkungen stattfinden. Wenn nun aber mechanische Kräfte von außen auf den Körper einwirken, so wird durch sie Energie auf den Körper übertragen. Dabei können die äußeren Wirkungen höchst mannigfacher Art sein, je nach der Natur der angenommenen Kräfte (Stoß-, Reibungs-, in die Ferne wirkende Kräfte), es können sich also in der Umgebung äußere mechanische oder innere molekulare oder thermische oder elektrische Änderungen vollzogen haben: der Arbeitswert dieser äußeren Wirkungen ist aber immer gleich der Arbeit, welche die angenommenen Kräfte an dem Körper leisten, einerlei woher sie stammen, und diese Arbeit ist der Betrag der in den Körper transferierten Energie, d. h. der Zuwachs seiner lebendigen Kraft.

Man sieht nun leicht, daß die Anzahl der Anwendungen des Prinzips in seiner letzten Fassung auf einen gegebenen Prozeß geradezu eine unendliche ist, sowohl nach der Zeit als auch nach der Materie. Denn wir können einerseits eine beliebig große oder kleine Zeit der Betrachtung zugrunde legen, insbesondere eine unendlich kleine Zeit, wodurch wir die Anwendung auf Elementarprozesse erhalten, andrerseits einen beliebig großen oder kleinen Komplex von materiellen Elementen, insbesondere einen unendlich kleinen, also einen Elementarkörper; für jeden solchen Komplex liefert das Prinzip eine besondere Gleichung. Man hat sich jedesmal diejenige Kombination auszuwählen, für welche sich die Rechnung am bequemsten gestaltet, und muß selbstverständlich dabei stets die Vorsicht üben, von vornherein das zugrunde gelegte materielle System — wir wollen es im folgenden zur Abkürzung „Grundsystem" nennen — genau zu fixieren.

Nehmen wir z. B. irgend ein Gasquantum, das durch Kompression und durch Wärmezufuhr von außen in seinem Zustand geändert wird. Solange wir das Gas allein als Grundsystem betrachten, bestehen die aufgewendeten äußeren Wirkungen in der Lagenänderung des komprimierenden

Körpers und in der Wärmeabgabe des benutzten Wärmereservoirs, die Energie des Gases wächst also um den Arbeitswert der Kompression und der zugeleiteten Wärme. Dabei ist es vollständig gleichgültig, ob die Kompression etwa durch einen schweren Stempel bewirkt wird, der durch sein Herabsinken Arbeit leistet, oder etwa durch ein anderes Gas, das sich ausdehnt und dadurch Wärme verliert, usw. Es kommt hier einzig und allein auf die mechanische Arbeit an, durch welche gerade diese Kompression bewirkt werden kann, auf welche Weise, ist einerlei. Nehmen wir nun spezieller an, die Kompression werde durch einen mit einem Gewicht belasteten Stempel bewirkt, dessen Schwere dem Druck des Gases das Gleichgewicht hält, und schließen wir dies Gewicht mit in das Grundsystem ein, so verschwindet die Kompressionsarbeit als äußere Wirkung, dagegen tritt statt dessen neu hinzu die Arbeit der von der Anziehung der Erde herrührenden, auf das Gewicht wirkenden Schwerkraft, welche der vorigen an Größe gleich ist. Wenn wir des weiteren auch die Erde noch in das Grundsystem aufnehmen, so verschwindet die besprochene Arbeit als äußere Wirkung ganz, dafür erscheint aber in dem Ausdruck der Energie des Grundsystems ein neues Glied, nämlich die Energie der Schwere des Gewichtes, als Funktion der Höhe, auf der es sich befindet. So einfach und selbstverständlich diese Überlegungen für den vorgelegten Fall erscheinen, so wichtig werden sie, sobald man von diesen einfachen zu etwas komplizierteren Zuständen übergeht, in denen z. B. das komprimierende Gewicht eine gewisse Geschwindigkeit besitzt und der Druck des Gases nicht mehr gleich ist der Schwere des Gewichts.

Vielleicht dürfte es nicht unzweckmäßig erscheinen, bei dieser Gelegenheit eines Sprachgebrauches Erwähnung zu tun, der, unrichtig aufgefaßt, leicht zu Mißverständnissen Anlaß geben kann. Man spricht manchmal von der Energie eines schweren Körpers als von dem Produkt aus seiner

Schwere und der Höhe seines Schwerpunktes. Diese Bezeichnung ist ungehörig, wenn man sich den Körper als Grundsystem denkt; denn die Energie eines Körpers hängt immer nur von seinem eigenen Zustand ab, niemals zugleich von der Lagerung äußerer Massen; in der Tat findet man bei anderen Zentralkräften diese Ausdrucksweise nicht. Um also von der Energie der Schwere reden zu können, muß man sich stets, wenn auch stillschweigend, die Erde mit in das Grundsystem einbegriffen denken; andernfalls ist die Arbeit der Schwerkraft nicht als Energieart, sondern als eine äußere Wirkung (der zufällig in der Nähe vorhandenen Erde, vgl. S. 105) in Rechnung zu bringen.

Wenn wir die Bedeutung der Verallgemeinerung, die wir mit der ursprünglichen Fassung unseres Prinzips vorgenommen haben, näher ins Auge fassen, so beruht dieselbe im wesentlichen darauf, daß wir die eine Gleichung, welche die Erhaltung der Energie für ein allen äußeren Wirkungen entzogenes System ausspricht, zerlegt haben in eine Anzahl Gleichungen, welche die Veränderungen der Energie, die Aufnahme und Abgabe derselben in den einzelnen Teilen des Systems regeln, je nach Maßgabe der entsprechenden äußeren Wirkungen. Hierbei möchten wir jedoch noch auf einen Punkt besonders aufmerksam machen. Teilen wir das ganze System, welches gar keinen äußeren Wirkungen unterliegt und dessen Energie also konstant ist, etwa in zwei Teile, die wir einen nach dem andern als Grundsystem auffassen, so wäre es irrig anzunehmen, daß die von dem einen Teil in einer gewissen Zeit aufgenommene Energie gleich ist der von dem andern Teil in derselben Zeit abgegebenen. Dieser Satz würde nur dann gelten, wenn die Energie des ganzen Systems gleich der Summe der Energien der beiden Teilsysteme wäre, was, wie wir schon wiederholt hervorgehoben haben, im allgemeinen nicht der Fall ist. Nehmen wir als Beispiel zwei materielle Punkte, welche mit einer Zentralkraft aufeinander wirken. Die Energie des Systems

ist dann die Summe aus den lebendigen Kräften und dem Potenzial der Zentralkraft; sie ist mit der Zeit unveränderlich. Die Energie eines einzelnen Punktes ist seine lebendige Kraft, ihre Veränderung wird gemessen durch die äußere Wirkung, die der Punkt erleidet, d. h. durch die Arbeit, welche die Kraft an ihm leistet. Dabei kann es offenbar sehr wohl vorkommen, daß in einer gewissen Zeit auf jeden der beiden Punkte positive Energie von außen übergeführt wird, und infolgedessen die lebendigen Kräfte beide zugleich wachsen. Nur wenn die Fernewirkungen ganz in Wegfall kommen, so bei Erscheinungen wie die der elastischen Wellenbewegung, der Wärmeleitung, kann man sagen, daß die auf einen materiellen Komplex übertragene Energie zugleich einem anderen Komplex entzogen wird.

Überhaupt spielen die Vorstellungen, von denen man bei der Auffassung der Wirksamkeit der Naturkräfte ausgeht, hier, wo wir von der Energie eines beliebig ausgewählten materiellen Systems reden, eine noch wichtigere Rolle als oben, wo wir nur solche Systeme betrachteten, die keinen äußeren Wirkungen unterliegen. Dort (S. 123) handelte es sich nur um die primäre Form der Energie, die Größe derselben war für jeden Zustand des Systems durch die allgemeine Definition bestimmt; sie wäre es auch hier, wenn man immer imstande wäre, die Messung, wie sie die Definition vorschreibt, zu realisieren. Da aber dies infolge der unvollkommenen Beobachtungsmittel nicht immer der Fall ist, kann es vorkommen, daß für die Energie eines bestimmten materiellen Systems je nach den Voraussetzungen, die man über die Natur der wirkenden Kräfte macht, nicht nur verschiedene Formen, sondern ganz verschiedene Zahlenwerte erhalten werden, und daß man nicht imstande ist, die entstehende Differenz auf experimentellem Wege zu schlichten. Ein Beispiel hierfür liefert die schon wiederholt von uns besprochene Natur des elektrischen Feldes. Die Energie eines beliebig herausgegriffenen Teils eines Dielektrikums ist nach den Faraday-

schen Anschauungen von 0 verschieden, man kann aus der Überführung dieses Teils aus dem Zwangszustand in den neutralen Zustand Arbeitsleistung erhalten, während nach der Weberschen Vorstellung der Isolator sich stets in dem nämlichen Zustand befindet, abgesehen von etwaigen sekundären Veränderungen, ob nun freie Elektrizität in den Leitern vorhanden ist oder nicht. Solange durch speziellere Forschungen über diese Frage keine endgültige Entscheidung getroffen ist, wird es daher nötig sein, ehe man zur Aufstellung der Gleichung schreitet, welche das Prinzip der Energie ausspricht, jedesmal zuerst genau den Standpunkt zu fixieren, den man in der Auffassung der zu untersuchenden Vorgänge innehalten will.

Die von uns vorgenommene Zerlegung der Gleichung der Erhaltung der Energie gründet sich auf die Betrachtung eines aus dem ursprünglichen System beliebig herausgegriffenen materiellen Komplexes als Grundsystem, und der in denselben eintretenden oder austretenden Energie. Statt der Zerlegung des Systems in seine materiellen Teile können wir aber mit demselben Rechte, und manchmal mit erheblichem Vorteil, eine andere Zerlegung vornehmen, namentlich die in die Volumenteile. Ein gegebenes Raumvolumen enthält zu einer bestimmten Zeit immer ein bestimmtes materielles System, und insofern dies System in dem nämlichen Zeitpunkt eine bestimmte Energie besitzt, kann man von der Energie des Volumens sprechen. Die Energie eines fixen Raumvolumens wird sich nicht mit der Zeit ändern, wenn weder Materie in das Volumen ein- oder austritt, noch äußere Wirkungen auf die in ihm enthaltene Materie stattfinden, die Änderung der Energie rührt also immer her von einer dieser beiden Ursachen, so daß wir den Satz aussprechen können: Die in ein Raumvolumen transferierte Energie wird bedingt einmal durch die äußeren Wirkungen auf die darin enthaltene Materie, und außerdem durch den Eintritt neuer Materie. Es wird nun darauf ankommen, ob die Aufstellung

der Ausdrücke für die so in das Volumen übertragene Energie durch die näheren Umstände des betrachteten Falles erleichtert wird.

In der Tat finden sich mancherlei Anwendungen, in denen dieser Satz bequeme Dienste leistet. So z. B. bedient sich seiner im wesentlichen Clausius bei der Berechnung der in einem Leiter von einem stationären galvanischen Strom erzeugten (Jouleschen) Wärme, sei es, daß, wie bei metallischen Leitern,[1]) die Materie des Leiters ruht, oder daß, wie bei elektrolytischen,[2]) die Materie zugleich mit der Elektrizität im Wandern begriffen ist. Denken wir uns ein beliebiges fixes vom Strom durchflossenes Volumen, so kann die darin enthaltene Energie vergrößert werden 1) durch äußere Wirkungen, 2) durch neu eintretende Materie. Bei der Berechnung dieser Vergrößerung kommt es nun aber wesentlich darauf an, von welcher Vorstellung über die Natur des galvanischen Stromes man ausgeht. Nehmen wir zunächst an, die elektrischen Teilchen verhalten sich wie materielle Atome von verschwindend kleiner Trägheit, die durch die in die Ferne wirkende Anziehungs- oder Abstoßungskraft der gesamten im Leitersystem vorhandenen freien Elektrizität auf ihrer Bahn vorwärts getrieben werden, wobei wir der Einfachheit halber nur eine Elektrizitätsart als beweglich voraussetzen können, so ist die Energie eines im konstanten Strome sich bewegenden materiellen Teilchens (Elektrizität, Jon) von seiner Lage unabhängig, nicht etwa mit der Potenzialfunktion veränderlich, weil diese von äußeren Massen herrührt. Da nun in einer gewissen Zeit immer gerade ebensoviel Materie in das „Grundvolumen" eintritt wie austritt, so wird durch diesen Umstand keine Energie-

1) R. Clausius: Über die bei einem stationären Strom in dem Leiter getane Arbeit und erzeugte Wärme. Pogg. Ann. 87, p. 415, 1852.

2) R. Clausius: Über die Elektrizitätsleitung in Elektrolyten. Pogg. Ann. 101, p. 338, 1857. p. 340.

veränderung bedingt und es bleiben allein zu berücksichtigen die äußeren Wirkungen. Diese liefern eine Energievermehrung gleich der Arbeit, welche die Kräfte des Gesamtsystems an der im ganzen Volumen strömenden Materie leisten. Um den Betrag dieser Arbeit wird also die Energie des Volumens vergrößert, und da wegen des stationären Zustandes die elektrische Energie konstant ist, muß die Vergrößerung der thermischen Energie zugute kommen.

Etwas anders wird der Gedankengang, wenn man sich die Elektrizität als ein kontinuierlich ausgedehntes feines inkompressibles Fluidum vorstellt, das durch eine, nur in unmeßbar kleine Entfernungen wirkende Kraft (eine Art Druck) durch den Leiter hindurchgepreßt wird. Auch in diesem Fall ist die Energie eines strömenden Teilchens unabhängig vom Orte, es wird daher hier ebensowenig wie oben durch den Eintritt von Materie in das betrachtete Volumen eine Energieänderung darin bedingt. Was aber die äußeren Wirkungen betrifft, so reduzieren sich diese hier auf die Arbeit der an der Oberfläche des Volumens wirksamen Kräfte (alles andere sind innere Wirkungen). Diese Arbeit ist an jedem Orte proportional dem Werte der Potenzialfunktion (ebenso wie bei Flüssigkeiten dem Druck), sie ist also an den Eintrittsstellen der Strömung größer als an den Austrittsstellen, und somit erhalten wir für die durch die äußeren Wirkungen geleistete Gesamtarbeit einen positiven Ausdruck, dessen Wert übereinstimmt mit dem aus der obigen Betrachtung gewonnenen.

Nimmt man endlich, wie einige wollen, an, daß die elektrische Strömung nicht in einer Translation von Materie, sondern, nach Art der Wärmeleitung, in einer Fortpflanzung besonderer Bewegungsformen besteht, so ist zur Erklärung der Jouleschen Wärme die Annahme notwendig, daß die in einem gewissen Zeitintervall in ein Volumen eintretende lebendige Kraft dieser Bewegungen um einen bestimmten Betrag größer ist als die austretende, daß also durch den

Widerstand des Leiters eine Art Absorption der den Strom konstituierenden Schwingungen bedingt wird.

Durch die abgeleiteten Sätze sind wir offenbar in den Stand gesetzt, für jedes materielle Element und jedes Volumenelement eines Körpers aus dem Prinzip der Energie eine besondere Gleichung abzuleiten, und somit haben wir in der Tat, wie schon oben bemerkt wurde, für jeden beliebigen Prozeß unendlich viele Gleichungen zur Verfügung, welche in seinen Verlauf bestimmend eingreifen. Wenn es sich nun aber um die eindeutige Bestimmung des zeitlichen Verlaufs des Prozesses handelt, so dürfen wir bei den erhaltenen Resultaten nicht stehen bleiben; denn diese weitergehende Aufgabe sind wir mit den bis jetzt gewonnenen Hilfsmitteln noch nicht zu lösen imstande; wir wären es nur dann, wenn die Veränderungen eines einzelnen materiellen Elements von einer einzigen Variabeln abhingen, entsprechend der einen Gleichung, die wir für das Element aufstellen können, was ja im allgemeinen nicht der Fall ist.

Wir können uns aber doch, wenn wir noch um einen Schritt weitergehen, in vielen Fällen die Mittel verschaffen, welche für die Lösung der angeregten Aufgabe gerade hinreichend sind; dieser Schritt besteht in der Hereinziehung des schon oben gelegentlich benutzten Prinzips der Superposition der Energien. Die Energie eines materiellen Systems stellt sich erfahrungsgemäß dar als die Summe aus den einzelnen Energiearten, die untereinander vollständig unabhängig sind, und daher zerfällt der Gesamtvorrat von Energie auch dem Begriffe nach in eine Reihe von Einzelenergien, die jede für sich bestimmt werden können. Wenn nun auf das System Wirkungen von außen ausgeübt werden, durch welche Energie in dasselbe transferiert wird, so kann man im allgemeinen auch diese Wirkungen zerlegen in verschiedene Arten. Jede dieser Wirkungsarten bringt eine bestimmte Veränderung der ihr entsprechenden Energieart im System hervor, so daß die Gleichung, welche den Zusammen-

hang der Änderung der Gesamtenergie mit den äußeren Wirkungen ausspricht, in eine Reihe von Einzelgleichungen zerfällt, deren jede die Veränderung einer bestimmten Energieart in ihrer Abhängigkeit von einer besonderen äußeren Wirkung regelt. Wir haben hier also eine weitere Zerlegung der Gleichung der Energie, die sich von der früheren dadurch unterscheidet, daß wir oben das materielle System in einzelne materielle oder Volumenteile, hier aber die Energie in einzelne Energiearten geteilt haben.

Denken wir uns beispielsweise einen Körper, der sich frei im Raum bewegt. Seine Energie zerfällt in zwei Teile: die lebendige Kraft seiner sichtbaren Bewegung, und seine innere, etwa thermische Energie. Solange keine äußeren Wirkungen stattfinden, bleibt die Gesamtenergie konstant. Aber nicht nur diese, sondern auch jede der beiden Energiearten für sich bleibt konstant: der Körper bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit und bleibt auf konstanter Temperatur, unter keinen Umständen wird ohne entsprechende äußere Wirkung eine Änderung dieser Größen stattfinden, obwohl nach dem allgemeinen Prinzip eine Umwandlung einer einzelnen Energieart in eine andere ja sehr wohl statthaft wäre. Denken wir uns ferner, daß auf den Körper gewisse Wirkungen von außen ausgeübt werden, welche bestehen mögen einmal in einer aus der Ferne kommenden mechanischen Kraft, etwa der Schwere, außerdem aber in einer Wärmezufuhr, etwa durch Strahlung, so wird die Energie des Körpers wachsen um die Summe der von der Kraft geleisteten Arbeit und der Quantität der zugeführten Wärme. Aber wir können noch mehr sagen: die äußeren Wirkungen zerfallen hier in zwei verschiedene Arten, deren jede nur die ihr entsprechende Energieart beeinflußt: die Arbeit der Kraft ändert nur die Geschwindigkeit, nicht aber die Temperatur des Körpers, und die zugeführte Wärme erhöht nur die Temperatur, nicht aber die Geschwindigkeit. Die verschiedenen Wirkungen mit den ihnen entsprechenden Energien gehören

ganz getrennten Gebieten an und liefern daher jede eine besondere Gleichung.

Allerdings ist wohl zu bedenken, daß die Unabhängigkeit der Energiearten sowohl als auch der äußeren Wirkungsarten voneinander in diesem wie in allen ähnlichen Fällen niemals a priori behauptet werden kann, sondern stets zugleich experimentell begründet werden muß. So kann man sich ja leicht vorstellen, daß die in Ätherschwingungen bestehenden Wärmestrahlen eine direkte mechanische Einwirkung auf den Körper ausüben, wenn auch bisher eine solche Wirkung nicht mit Sicherheit nachgewiesen werden konnte,[1]) und andrerseits ist augenscheinlich, daß eine mechanische Kraft, wenn sie nicht aus der Ferne, sondern z. B. als Reibung oder Stoß auf die Oberfläche des Körpers wirkt, sich wenigstens großen Teils unmittelbar in Wärme umsetzen kann. Es ist auch sehr wohl denkbar, daß zwei Energiearten, die eine Zeit lang als voneinander unabhängig betrachtet worden sind und bei der angenäherten Berechnung gewisser Erscheinungen immer noch als unabhängig betrachtet werden können, einmal bei näherer Erkenntnis der Naturkräfte in ein Abhängigkeitsverhältnis voneinander treten.

Hier stoßen wir in der Tat auf eine Grenze der Anwendbarkeit (nicht der Gültigkeit) des Energieprinzips; denn wenn die einzelnen Energiearten sich nicht mehr unabhängig voneinander, eine jede nach Maßgabe der ihr gerade entsprechenden äußeren Wirkungen, ändern, so müssen wir mit

---

1) [Anm. 1908. Dies ist inzwischen geschehen, und zwar von P. Lebedew (Ann. d. Physik, 6, p. 433, 1901), in Übereinstimmung mit der Theorie von Maxwell. Daher darf jetzt das Prinzip der Superposition in seiner Anwendung auf die Trennung der thermischen von der mechanischen Energie nur mehr als annähernd gültig betrachtet werden. Vgl. auch die folgenden Sätze im Text, und M. Planck: Zur Dynamik bewegter Systeme, Sitz.-Ber. d. k. preuß. Akad. d. Wiss. v. 13. Juni 1907.]

der Zerlegung der Gleichung der Energie innehalten. Dann liefert das Energieprinzip für ein materielles Element weniger Gleichungen, als zur Berechnung seiner Zustandsänderung erforderlich sind. Hierher gehören u. a. alle die Fälle, in denen die im Innern eines Elements vor sich gehenden Prozesse in gar keinen unmittelbaren Zusammenhang mit den äußeren Wirkungen zu bringen sind, wie z. B. alle explosionsartigen Erscheinungen, bei denen minimale äußere Wirkungen die größten und verschiedenartigsten Umwandlungen einzelner Energiearten ineinander bedingen können. Dabei erhebt sich nun die Frage: Nach welchem Gesetz, in welchem Sinne findet in solchen Fällen der Umsatz der Energien statt? Diese Frage tritt aus dem Rahmen unserer gegenwärtigen Untersuchungen heraus, ihre Beantwortung läßt sich nicht mehr vom Standpunkt des einfachen Satzes der Erhaltung der Energie aus in Angriff nehmen, sondern muß auf ganz neue, von jenem Satze unabhängige Prinzipien basiert werden. Ein solches Prinzip besitzen wir bereits in dem von Carnot und Clausius begründeten zweiten Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie, der uns über die Richtung Aufschluß gibt, in welcher die Umwandlung der verschiedenen Energiearten ineinander von statten geht.[1])

Aber ungeachtet der dargelegten Beschränkungen bleibt der hohe praktische Wert, welcher der Trennung der äußeren Wirkungen je nach ihrem Einfluß auf die einzelnen Energiearten innewohnt, ungeschmälert bestehen. Er beruht im wesentlichen auf der Gewinnung eines festen Standpunktes, von dem aus man die Bedingungen der Umwandlung der Energiearten untereinander, und damit die Mannigfaltigkeit der Naturkräfte überhaupt, überschauen kann. Denn man wird dabei stets von neuem auf die Frage geführt: Welche

1) [Anm. 1908. Ein anderes derartiges Prinzip wäre das in seiner vollen Allgemeinheit zuerst von A. Einstein (Ann. d. Physik, 17, p. 891, 1905) ausgesprochene Prinzip der Relativität, dessen Allgemeingültigkeit indessen heute noch nicht sicher feststeht.]

Umsetzungen von Energie finden unabhängig voneinander statt? und die Beantwortung dieser Frage bietet das erste Mittel, in die so verwickelt erscheinenden Vorgänge, die sich im Rahmen des kleinsten Prozesses abspielen, Ordnung zu bringen und sie einzeln der experimentellen Untersuchung zugänglich zu machen. Ohne das Prinzip der Superposition der Energien könnte man die Mechanik nicht trennen von der Wärme, die Elektrizität nicht vom Magnetismus, und die Einteilung der ganzen Physik in ihre verschiedenen Gebiete wäre von vornherein unstatthaft. Ob wir nun in späterer Zeit einmal weniger Energiearten unterscheiden können als jetzt, ob sich vielleicht alle auf eine einzige oder zwei reduzieren lassen, ist jetzt ebenso wenig zu beantworten, als etwa die Frage, ob die ponderable Materie vom Lichtäther essenziell verschieden ist oder nicht. Daß wir aber in der Tat imstande sind, allein auf dem jetzt gewonnenen Standpunkt fußend, mit Hilfe der entwickelten Formulierungen des Prinzips der Erhaltung der Energie die Grundgesetze der Mechanik sowohl, als auch der übrigen Teile der Physik in derselben Form abzuleiten, wie dies gewöhnlich von verschiedenen Ausgangspunkten her unternommen wird, werden wir im letzten Abschnitt dieser Schrift aufs deutlichste zu zeigen uns bemühen; zugleich wird uns diese Aufgabe bemerkenswerte Anwendungen der hier vorgetragenen Sätze auf die einzelnen Energiearten in Fülle darbieten.

Indem wir hiermit die Untersuchungen beschließen, welche uns zur Aufstellung des Prinzips der Erhaltung der Energie in einer für die Anwendung möglichst bequemen Form geführt haben, wollen wir den Ausgang dieses Abschnittes dazu benutzen, um die Zahl und die Bedeutung der Beweise, die man für die Richtigkeit des Prinzips beibringen kann, einer Musterung zu unterwerfen. Es ist allerdings in neuerer Zeit auch die Behauptung laut geworden,

daß das Prinzip überhaupt eines Beweises weder fähig noch bedürftig sei, weil es a priori gelte, d. h. eine uns von der Natur mitgegebene, notwendige Form unseres Anschauungs- und Denkvermögens vorstelle; es geht hier wie mit so manchen anderen Wahrheiten, deren Erkenntnis durch jahrhundertelange Arbeit erkämpft worden ist, daß dieselben hinterher, wenn die Macht der Gewohnheit in ihr Recht tritt, als selbstverständlich und angeboren hingestellt werden. Daher bedarf es zu unserer Rechtfertigung wohl nur eines Hinweises auf die geschichtliche Entwicklung des Prinzips, wenn wir eine derartige Behauptung kurzer Hand ablehnen. Vgl. hierzu auch die Anm. auf S. 111.

Wie bei jedem Beweis eines naturwissenschaftlichen Satzes, so läßt sich auch bei unserem Prinzip von einer doppelten Methode sprechen: dem deduktiven und dem induktiven Verfahren. Während die erstere den Satz in seiner ganzen Allgemeinheit als ein logisches Resultat des Zusammenbestehens einer Reihe von anderen, sei es aus der Erfahrung oder anderswoher gewonnenen, allgemein für richtig anerkannten Sätze erscheinen läßt, geht umgekehrt die induktive Methode darauf aus, an der Hand der Erfahrung die einzelnen Folgerungen zu prüfen, welche aus dem zu beweisenden Satze fließen, wenn man ihn einstweilen als gültig annimmt und mit anderen hinreichend begründeten Sätzen kombiniert. Kommt dann eine einzige Folgerung zum Vorschein, die mit der Erfahrung nicht übereinstimmt, so ist der Satz entschieden zu verwerfen, ist dies nicht der Fall, so kann er bestehen bleiben; immer aber läßt sich auf induktivem Wege nur ein gewisser Grad von Wahrscheinlichkeit der Wahrheit des zu Beweisenden erzielen, welche in dem Maße wächst, als die Versuche variiert werden. Nichtsdestoweniger wird man der induktiven Beweismethode stets einen besonders hohen Wert beimessen; denn da die Wahrheit unserer ganzen Naturwissenschaft in letzter Linie sich auf die Erfahrung gründet, so wird der

Glaube an die Richtigkeit eines Satzes um so fester in unserer Überzeugung wurzeln, je näher der Satz mit einer direkt durch die Erfahrung zu konstatierenden Tatsache zusammenhängt. Darum werden wir jedesmal, wenn es sich um die Feststellung eines neuen Prinzips handelt, demselben von allen möglichen Seiten durch Experiment und Beobachtung beizukommen suchen, und kein Physiker wird sich mit der reinen Deduktion eines naturwissenschaftlichen Gesetzes von einiger Tragweite begnügen, er wird womöglich immer noch die höchste Instanz, die Erfahrung, zu Rate ziehen.

Blicken wir von diesem Gesichtspunkt aus auf das von uns behandelte Prinzip, so genügt ein Blick auf die im vorangehenden und im folgenden Abschnitt dargestellten Anwendungen, von denen keine einzige der Erfahrung widerspricht, um uns die Gesamtheit der induktiven Beweise, die sich über alle uns bekannten Naturerscheinungen hin erstrecken, als eine imposante Macht erscheinen zu lassen, welche in bestimmtester Weise für die unbeschränkte Richtigkeit des Prinzips eintritt. Es hieße die ganze Entwicklungsgeschichte desselben wiederholen, wenn wir an dieser Stelle versuchen wollten, einen Überblick über die verschiedenartigen Erfahrungsbeweise zu geben, die man im Laufe der Zeit zusammengetragen hat; fast jede neue Anwendung brachte auch einen neuen Beweis, von der Reibungswärme an, die, unabhängig von dem Material der sich reibenden Körper, von ihren Geschwindigkeiten, Temperaturen usw. einzig und allein bestimmt ist durch die aufgewendete mechanische Arbeit, bis zu den Vorgängen der galvanischen Induktion, welche die Bewegung eines Magneten hervorruft, unabhängig von der Beschaffenheit des Leiters, in dem sie erzeugt wird.

Und doch: so überwältigend uns die Zahl und Bedeutung dieser induktiven Beweise entgegentritt, es dürfte niemand ein so eingefleischter Empiriker sein, daß er nicht

noch das Bedürfnis empfände nach einem anderen Beweise, der, auf deduktiver Grundlage aufgebaut, das Prinzip in seiner ganzen umfassenden Bedeutung als ein einziges geschlossenes Ganzes aus gewissen noch allgemeineren Wahrheiten entspringen läßt. Denn wenn auch die Vielheit der gemachten einzelnen Erfahrungen uns mit Notwendigkeit zu der Annahme dieses Gesetzes zu drängen scheint, so bürgt ja niemand dafür, daß nicht doch noch einmal eine vereinzelte, bisher aus irgend welchen Gründen übersehene Klasse von Tatsachen aufgefunden werden kann, welche sich den Forderungen des Prinzips nicht fügt. Es läßt sich wohl auch kaum darüber streiten, daß wir die volle beruhigende Gewißheit, welche die Überzeugung von der Wahrheit eines Satzes verleiht, uns nicht auf dem Wege der Induktion allein verschaffen können, sondern nur zugleich dadurch, daß wir von einem höheren Standpunkt herab den Satz als eine vollkommene Einheit ins Auge fassen. Wie wäre es sonst auch denkbar, daß zu einer Zeit, wo außer den in weiteren Kreisen wenig beachteten Untersuchungen von Mayer und Colding nur eine geringe Anzahl von Joules Versuchen vorlag, wo man also von einem induktiven Beweise noch kaum sprechen konnte, der Gedanke an die Erhaltung der Energie doch so überraschend schnell an vielen Stellen zugleich Wurzel schlug und auf den verschiedensten Seiten zu neuen Untersuchungen anregte, wenn nicht eben die Erkenntnis jener unmittelbaren Einheit, wie sie nur durch Deduktion gewonnen werden kann, sich einfach und klar allen Köpfen aufgedrängt hätte. Für uns erhebt sich nun aber die Frage, auf welche Weise man denn durch Deduktion zu der Aufstellung unseres Prinzips gelangen kann, beziehungsweise ob es überhaupt einen deduktiven Beweis gibt, der auf streng wissenschaftliche Bedeutung, wie sie heutzutage in der Naturwissenschaft verlangt wird, Anspruch erheben darf. Gehen wir auf diese Frage etwas näher ein.

Da jede folgerichtige Deduktion einen allgemein als wahr

anerkannten Obersatz voraussetzt, dessen Umfang nicht kleiner sein darf als der des zu beweisenden Satzes, so wird für unsern Fall die Hauptschwierigkeit darin bestehen, einen solchen Obersatz zu finden, der einerseits eine so allseitige Anerkennung genießt, daß er als sichere Gewähr für die Richtigkeit unseres Prinzips dienen kann, andererseits aber auch umfassend genug ist, um das ganze Prinzip mit seiner enormen Tragweite in sich einzuschließen. Man sieht auf den ersten Blick, daß die Auswahl unter den Sätzen, welche beiden Forderungen genügen, keine große sein wird; trotzdem lassen sich ihrer verschiedene namhaft machen, die im Lauf der Zeiten die Stelle eines Obersatzes in der deduktiven Schlußfolgerung beansprucht haben.

Die älteste Deduktion greift nicht weniger weit hinauf als bis zur Person des Schöpfers selbst, der in seiner Ewigkeit und Unveränderlichkeit diese seine Eigenschaften auch der von ihm geschaffenen Natur und ihren Kräften mitteilt, woraus dann hervorgeht, daß die in der Welt enthaltene gesamte „Menge von Bewegung" für alle Zeiten einen unzerstörbaren, konstanten Wert hat. Da diese, von Descartes (vgl. S. 9) herrührende Betrachtung offenbar darauf abzielt, ein allgemeines Naturgesetz zu begründen, das die Summe der in der Natur wirksamen Kräfte ebenso regelt, wie die Menge der vorhandenen Materie, so darf sie gewiß mit dem Prinzip der Erhaltung der Energie in Zusammenhang gebracht werden; jedenfalls ließen sich diese Ideen auch auf die gegenwärtige Form unseres Prinzips ohne weiteres übertragen.

Wesentlich in demselben Gedankengang, wenn auch von einem etwas bescheideneren Standpunkt aus, bewegt sich die Beweisführung, die Colding (S. 34 f.) für die Erhaltung der Kraft beizubringen suchte. Er appelliert zwar nicht mehr gerade an die allerhöchste Instanz, wohl aber erblickt er den Grund der Unveränderlichkeit der Naturkräfte in dem Umstand, daß diese Kräfte, eben weil sie die Natur so voll-

kommen beherrschen, selber übersinnliche geistige Wesen sein müssen, die als solche unmöglich dem natürlichen Tode oder der Vergänglichkeit unterworfen sein können. Immerhin hält er es für angezeigt, diesen Satz auch durch die Erfahrung zu prüfen, und stellt in diesem Sinne seine Versuche an. — Da nach den heutigen Anschauungen jeder Beweis eines naturwissenschaftlichen Satzes, dessen Bedeutung auf metaphysischem Boden wurzelt, von vornherein seine Kraft verloren hat, so können wir über diese und ähnliche Deduktionen kurz hinweggehen.

Mehr Beachtung verdient schon die Vorstellungsweise, die Mayer (S. 24f.) seinen Auseinandersetzungen an die Spitze stellte. Dieselbe bewegt sich zwar noch auf etwas schwankender Grundlage, kann aber doch gewiß nicht mehr als rein metaphysisch bezeichnet werden. Seinen Hauptsatz: Causa aequat effectum: die Ursache ist gleich der Wirkung, erläutert er dahin, daß in der Natur jede Ursache zu einer ihr eigentümlichen Wirkung komme, und umgekehrt: daß in der Wirkung nichts enthalten ist, was nicht schon in der Ursache, unter irgend einer Form, gelegen war. Daher bestehen alle Veränderungen, die in der Natur vor sich gehen, nicht in der Erzeugung, sondern nur in der Umwandlung von Kräften nach bestimmten konstanten Maßverhältnissen; die verschiedenartigen Kräfte sind also in gewissen bestimmten Verhältnissen einander äquivalent, sie können mithin sämtlich in gemeinsamem Maß gemessen werden, und die in diesem gemeinschaftlichen Maß ausgedrückte Summe aller in der Welt vorhandenen Kräfte bleibt mit der Zeit konstant. — Man darf wohl zugeben, daß diese Ableitung etwas Bestrickendes hat, denn das Gesetz von Ursache und Wirkung bildet ja das Postulat unseres ganzen Naturerkennens; doch ist andererseits wohl zu bedenken, daß der Reiz, den die Mayersche Deduktion auf uns ausübt, ganz bedeutend an Stärke verlieren würde, wenn wir eben nicht schon aus anderen Gründen die Wahrheit des Satzes erkannt und uns

durch jahrelange Übung an den Gedanken, den er ausspricht, gewöhnt hätten; auf jemanden, dem die Sache vollständig neu wäre, würde damit wohl kaum ein großer Eindruck erzielt werden können. Wird man daher den geschilderten Ideengang als eine vorzügliche Erläuterung des Erhaltungsprinzipes a posteriori wohl gelten lassen können, so dürfte demselben der Rang eines im physikalischen Sinne bindenden Beweises entschieden abzusprechen sein. Dazu ist die Bedeutung des aequat viel zu unbestimmt: wäre die Ursache der Wirkung wirklich gleich, so gäbe es überhaupt keine Veränderung in der Natur.

Die erste wirklich physikalische Deduktion, durch die das Energieprinzip in seinem vollen Umfang bewiesen wurde, ist die, welche Helmholtz in seiner Abhandlung über die Erhaltung der Kraft gegeben hat: sie basiert auf der mechanischen Naturauffassung, spezieller auf der Voraussetzung, daß alle in der Natur wirksamen Kräfte sich auflösen lassen in Punktkräfte, für welche die Newtonschen Axiome gelten. Diese Voraussetzung ist verbunden entweder mit der Annahme, daß alle Elementarkräfte Zentralkräfte sind, oder mit der, daß die Konstruktion des perpetuum mobile unmöglich ist. Über die Ausführung dieser Gedanken haben wir schon im vorigen Abschnitt (S. 40f.) das Wesentlichste beigebracht. Hiernach würde sich das Prinzip der Erhaltung der Energie im wesentlichen auf den mechanischen Satz der Erhaltung der lebendigen Kräfte reduzieren, und wir hätten die gesamte Energie der Welt als aus nur zwei Arten: der aktuellen (lebendige Kraft) und der potenziellen (Spannkraft) bestehend aufzufassen.

Wenn man bedenkt, daß die mechanische Naturanschauung schon von alters her, lange vor dem Bekanntwerden des Energieprinzips, in der Naturphilosophie eine bedeutende Rolle spielte, wohl hauptsächlich weil sie unserem Kausalitätsbedürfnis, welches nach möglichster Einheit der den Erscheinungen zugrunde liegenden Kräfte strebt, so vortreff-

lich entgegenkommt, wenn man ferner übersieht, wie ungemein anschaulich sich von dem mechanischen Standpunkt aus die Definition des Begriffes der Energie, die Formulierung und endlich der Beweis des Prinzips geben läßt, so ist es sehr wohl erklärlich, daß gerade dieser Beweis unter den deduktiven Methoden den Vorzug erhalten hat und auch wohl heutzutage als der am häufigsten gebrauchte anzusehen ist. Nach dem Vorgang von Helmholtz wurde er von anderen Physikern adoptiert (Mayer hat bekanntlich die mechanische Naturauffassung nicht geteilt), während gleichzeitig auch von England aus durch Joule, dem sich Rankine und Thomson anschlossen, die mechanische Theorie verbreitet und zur Anerkennung gebracht wurde.

Demungeachtet möchte es mir scheinen, als ob man mit größerem Rechte das Prinzip der Erhaltung der Energie zur Stütze der mechanischen Naturanschauung, als umgekehrt die letztere zur Grundlage der Deduktion des Energieprinzips machen würde, da doch dies Prinzip weit sicherer begründet ist, als die wenn auch noch so plausible Annahme, daß jede Veränderung in der Natur sich auf Bewegung zurückführen läßt. In unzähligen entscheidenden Fällen hat sich das Energieprinzip als richtig bewährt, während die Gründe, die man für die mechanische Theorie anführen kann, wenigstens soweit sie auf der unmittelbaren Erfahrung beruhen, zum größten Teil (nicht ausschließlich, vgl. die Gastheorie) auf die Erhaltung der Energie rekurrieren, aus der sie sich übrigens keineswegs mit Notwendigkeit ergeben (vgl. S. 57). Denn das Energieprinzip kann sehr wohl ohne die mechanische Naturauffassung bestehen. Vergeblich hat man sich bisher noch bemüht, die Gesamtheit der elektrischen und magnetischen Erscheinungen auf einfache Bewegungen zurückzuführen, und in der Anwendung auf die organische Welt, auf die wir den Beweis des Prinzips der Erhaltung der Energie doch ebensowohl ausdehnen wollen und müssen, läßt sich noch nicht einmal die Spur eines Anfangs nachweisen.

Der Ansicht aber, die jetzt wohl auch manchmal geäußert wird, daß man die mechanische Theorie als ein a priori-Postulat der physikalischen Forschung zu akzeptieren habe, müssen wir mit aller Entschiedenheit entgegentreten; dieselbe kann nicht von der Verpflichtung befreien, jene Theorie auf legalem Wege zu begründen. Die Naturwissenschaft kennt überhaupt nur ein Postulat: das Kausalitätsprinzip; denn dasselbe ist ihr Existenzbedingung. Ob dies Prinzip selber erst aus der Erfahrung geschöpft ist, oder ob es eine notwendige Form unseres Denkens bildet, brauchen wir hier nicht zu untersuchen.

Mir scheint es daher dem bisher so glänzend bewährten empirischen Charakter unserer modernen Naturwissenschaft besser zu entsprechen, die mechanische Naturauffassung als das möglicher- und wahrscheinlicherweise zu gewinnende Ziel der Forschung zu betrachten, als voreilig ein noch gar nicht sicher gestelltes Resultat zu antizipieren, um es zum Ausgangspunkt des Beweises eines Satzes zu machen, dessen Allgemeingültigkeit gesichert erscheint wie die weniger anderer der ganzen Naturwissenschaft. Die hohe praktische Bedeutung der mechanischen Naturanschauung bleibt durch diese Betrachtung vollständig ungeschmälert: dieselbe weist uns die Richtung an, in der die Forschung sich zu bewegen hat; denn nur auf dem Wege der Erfahrung kann die Frage nach der Zulässigkeit dieser Theorie entschieden werden. Man wird daher alle nur erreichbaren Mittel anwenden, um die mechanische Auffassung in allen Gebieten der Physik, Chemie usw. bis in die letzten Konsequenzen durchzuführen, und in diesem Sinne haben die hierauf gerichteten Bestrebungen ihren prinzipiellen Wert, um so mehr, da sie bisher schon glänzende Resultate zutage gefördert haben. Aber es ist doch noch ein großer Unterschied, ob man eine Hypothese als wahrscheinlich betrachten darf, oder ob man sie an die Spitze einer solchen Deduktion stellt, wie die ist, um welche es sich hier handelt. — Durch die angewendete Vorsicht

sichern wir uns zugleich vor unliebsamen Enttäuschungen. Denn sollte man wirklich einmal die merkwürdige Erfahrung machen, daß unsere Raum- und Zeitanschauung nicht allgemein genug ist, um die Fülle der Erscheinungen, die uns die Natur darbietet, zu beschreiben,[1]) so werden wir deshalb nicht gleich, wie es in ähnlichen Fällen schon geschehen ist, andere wohlbegründete Sätze mit fallen lassen, sondern werden leicht imstande sein, das bewiesene Wesentliche von dem nichtbewiesenen Unwesentlichen zu trennen.

Da wir nach den gemachten Ausführungen uns nicht entschließen können, dem mechanischen Beweis des Prinzips der Erhaltung der Energie diejenige Bedeutung beizumessen, die er gemeiniglich zu genießen pflegt,[2]) so übernehmen wir damit um so mehr die Verpflichtung, uns nach einem andern Satze umzusehen, der durch festere Begründung besser geeignet ist, der Deduktion als Ausgangspunkt zu dienen. Nun gibt es in der Tat noch einen solchen Satz, der die erforderlichen Eigenschaften in genügender Weise zu besitzen scheint, es ist der Erfahrungssatz, welcher die Unmöglichkeit des perpetuum mobile und seiner Umkehrung ausspricht, und zwar ganz unabhängig von jeder besonderen Naturauffassung. Im Anschluß an unsere frühere Terminologie (S. 112) können wir ihn folgendermaßen formulieren: „Es ist unmöglich, mit einem materiellen System einen Kreisprozeß (der das System genau in seinen Anfangszustand zurückbringt) so auszuführen, daß die äußeren Wirkungen einen von 0 verschiedenen, positiven oder negativen, Arbeitswert haben". (Über den Begriff des Arbeitswertes einer äußeren Wirkung s. S. 105 f.). Oder kürzer: „Positiver Arbeits-

---

1) E. Mach: Die Geschichte und die Wurzel des Satzes von der Erhaltung der Arbeit. Prag, 1872, Calve. Übrigens kann ich mich nicht mit allen hier dargelegten Ansichten einverstanden erklären.

2) [Anm. 1908. Heute ist, so viel ich beurteilen kann, die Wertschätzung des mechanischen Beweises erheblich zurückgegangen.]

wert kann weder aus nichts entstehen noch in nichts vergehen"; die Umkehrung ist mit wesentliche Voraussetzung.

Was nun zunächst die Begründung dieses Satzes anbelangt, so ist zu erwägen, daß an ihr Jahrhunderte gearbeitet haben; gab es doch Menschen, die sich nicht scheuten, Gut und Leben daran zu setzen, um durch Erschaffung von Arbeitswert aus dem Nichts die Behauptungen des Satzes zu widerlegen. Wenn man daher überhaupt einen durch Erfahrung gewonnenen indirekten Beweis gelten lassen will, so hat man es in diesem Falle zu tun, und wird dann auch den Preis, um welchen die für die ganze Menschheit so wertvolle Wahrheit erkauft wurde, nicht allzu kostbar finden. Tatsache ist jedenfalls, daß wir heutzutage nicht anstehen, jeden, der sich mit der Konstruktion eines perpetuum mobile abgibt, kurzweg für einen Toren zu erklären.

Etwas schwächer steht es allerdings mit dem Beweis des umgekehrten Satzes, daß Arbeitswert nicht in nichts verschwinden kann. Es hat wohl kaum jemals einen Menschen gegeben, der sich mit dem Problem, Arbeit zu vernichten, praktisch befaßt hat, ebenso wenig wie etwa mit dem, Gold in Blei zu verwandeln. Wir können daher von einem Erfahrungsbeweis der Unmöglichkeit der Lösung dieses Problems nicht in dem vollwichtigen Sinne reden, wie von dem des ersten Satzes, sondern müssen uns auf die Konstatierung der Tatsache beschränken, daß noch nie ein Prozeß beobachtet worden ist, durch den weiter nichts bewirkt wird als Vernichtung von Arbeitswert. Mit dieser Tatsache müssen wir uns an Stelle eines Beweises begnügen; denn von einer Deduktion des umgekehrten Satzes aus dem direkten kann deshalb nicht die Rede sein, weil sich nicht jeder Naturprozeß umkehren läßt. Logisch genommen würde durchaus kein Widerspruch in der Annahme liegen, daß Arbeit zwar nicht aus nichts entstehen, wohl aber unter Umständen in nichts vergehen kann. (Clapeyrons Ansicht S. 18.)

Überhaupt muß ja eingeräumt werden, daß auch der

Erfahrungsbeweis des direkten Satzes: der Unmöglichkeit der Erzeugung von Arbeit aus nichts, nur auf einem verhältnismäßig sehr beschränkten Teile des Gesamtbereichs der Naturkräfte geführt worden ist; sind uns doch schon heutzutage viel mannigfaltigere Erscheinungen bekannt und zugänglich, als damals, wo man auf die praktische Gewinnung des perpetuum mobile abzielte. Inwiefern man nun berechtigt ist, die früher in engerem Gebiete gewonnenen Erfahrungen auf alle Wirkungen in der Natur auszudehnen, läßt sich gegenwärtig nicht leicht beurteilen, da wir durch die Vertrautheit mit dem Energieprinzip doch schon zu sehr an die Allgemeingültigkeit dieser Wahrheit gewöhnt sind, um vorläufig ganz von ihr abstrahieren zu können.

Wie dem auch sei: Wir stellen an die Spitze der folgenden Ausführungen den Satz der Unmöglichkeit des perpetuum mobile und seiner Umkehrung im Kreise der gesamten anorganischen und organischen Natur, und wollen, gänzlich unabhängig von der mechanischen Naturanschauung, untersuchen, ob und unter welchen Bedingungen sich dieser Satz zum Beweise des Prinzips der Erhaltung der Energie verwerten läßt. Erinnern wir uns zunächst an die S. 110 gemachte Bemerkung, daß alle verschiedenen Formen des Prinzips enthalten sind in dem einen Satz: „Die Energie eines materiellen Systems in einem bestimmten Zustand, bezogen auf einen bestimmten Nullzustand, hat einen eindeutigen Wert", so wird es sich hier nur darum handeln, diesen Satz aus der Unmöglichkeit des perpetuum mobile zu deduzieren, und zwar unter Zugrundelegung der Definition, die wir (S. 104) für den Begriff der Energie aufgestellt haben. Als Beweismethode wählen wir die indirekte, indem wir zeigen, daß in jedem einzelnen Fall, wo sich aus der Definition zwei verschiedene Werte der Energie ergeben würden, die Konstruktion eines perpetuum mobile ermöglicht wäre.

Nehmen wir also an, man habe das materielle System

aus dem gegebenen Zustand A auf einem beliebigen Wege in den Nullzustand N gebracht und dabei den Arbeitswert der äußeren Wirkungen gleich a gefunden; es sei aber auch ein anderer Weg der Überführung möglich, und dieser liefere für die äußeren Wirkungen den von a verschiedenen Arbeitswert a'. Dann wird sich immer ein perpetuum mobile herstellen lassen, freilich nicht auf die Weise, wie man es manchmal angegeben findet, daß man das System auf dem einen Wege in den Zustand N, und auf dem andern Wege von da wieder zurück in den Zustand A bringt; denn der betreffende Prozeß braucht ja nicht umkehrbar zu sein. Wir werden vielmehr das System, nachdem es auf die eine oder die andere angegebene Weise in den Zustand N gelangt ist, auf irgend einem beliebigen Wege zurück in den Zustand A überführen und dadurch den Kreisprozeß schließen. Bezeichnen wir den Arbeitswert der bei der Rückkehr von N nach A eintretenden äußeren Wirkungen mit b, so haben wir über zwei Kreisprozesse zu verfügen, welche die respektiven Arbeitswerte $(a + b)$ und $(a' + b)$ produzieren. Da nun nach den gemachten Voraussetzungen diese beiden Größen ungleich sind, so muß wenigstens eine von ihnen von o verschieden sein, und damit wäre die Möglichkeit des perpetuum mobile oder seiner Umkehrung gegeben.

Als wesentliche Bedingung der Brauchbarkeit dieses Beweises müssen wir allerdings die allgemeine Voraussetzung anerkennen, daß die Überführung eines materiellen Systems aus einem gegebenen Zustand in irgend einen andern stets auf irgend eine Weise möglich ist; ohne sie wird die ganze Deduktion illusorisch. In der Tat: Betrachten wir einmal die äußeren Wirkungen, welche die Verwandlung des Diamant in amorphe Kohle hervorruft, wenn dieselbe etwa einmal auf chemischem, einmal auf physikalischem, etwa elektrischem Wege vorgenommen wird. Würden diese Wirkungen nicht den nämlichen mechanischen Arbeitswert besitzen, so wäre trotzdem gewiß niemand in der Lage,

diesen Umstand zur Konstruktion eines perpetuum mobile zu verwerten, da wir nicht imstande sind, die Kohle in Diamant zurückzuverwandeln [1]) und so den Kreisprozeß zu schließen. Indes glaube ich, daß der Einwand, den man aus diesem Umstand gegen die allgemeine Zulässigkeit der gegebenen Deduktion ableiten könnte, nicht stichhaltig ist. Denn es kommt nicht darauf an, ob die Kunst des Menschen imstande ist, den Übergang aus einem Zustand in einen andern nach Willkür zu vollziehen, sondern darauf, ob dieser Übergang in der Natur wirklich vorkommt oder auch nur bei geeignetem Zusammenwirken von Naturkräften vorkommen könnte. Wollte man diesen Schluß nicht anerkennen, so käme dies darauf hinaus, den Satz von der Unmöglichkeit des perpetuum mobile nicht einem Naturgesetz, sondern dem Mangel an Geschicklichkeit des Menschen entspringen zu lassen, was doch gewiß dem Wesen des Satzes zuwiderläuft. Nach allen unseren Erfahrungen ist nun die angeführte Bedingung immer als erfüllt zu betrachten; denn die Natur schafft fortwährend alles, was sie hervorbringt, aus den einfachsten Elementen, sie bereitet, allerdings auf uns zum Teil gänzlich unbekannte Weise, mit gleicher Leichtigkeit unorganische Substanzen und die kompliziertesten Organismen, und löst sie dann wieder in ihre Bestandteile auf. Dieselbe Frage haben wir schon bei früherer Gelegenheit in demselben Sinne besprochen (S. 110).

Wir glauben daher nicht irre zu gehen, wenn wir (im Gegensatz zur beschränkten Umwandlung der Energiearten) die Verwandelbarkeit der Materie aus allen möglichen Zuständen in alle möglichen andern, wenn die chemischen Elemente erhalten bleiben, als unbeschränkt voraussetzen, und damit ist die Deduktion des Satzes der Erhaltung der Energie mit allen seinen Konsequenzen aus dem Satze des perpetuum mobile gesichert. Wir stehen in der Tat nicht

1) [Anm. 1908. Vgl. oben S. 108.]

an, diesem Beweis unter den deduktiven Methoden die vornehmste Stelle anzuweisen; es bleibt dabei durchaus nicht ausgeschlossen, daß, wenn einmal die Naturwissenschaft auf eine höhere Entwicklungsstufe gelangt ist, ein anderer Erfahrungssatz, etwa die mechanische Naturanschauung, mit besserem Rechte der Deduktion zugrunde gelegt werden wird.

III. Abschnitt.

Verschiedene Arten der Energie.

Bevor wir uns an die Aufgabe machen, die im vorigen Abschnitt entwickelten Begriffe und Sätze durch entsprechende Anwendung auf die verschiedenen Energiearten einzeln zu verwerten, wollen wir zuerst einen orientierenden Blick auf das vor uns liegende Gebiet werfen und dabei zugleich die Methode fixieren, die uns bei den folgenden Untersuchungen leiten soll. Während es sich oben lediglich um die Feststellung der Prinzipien handelte und die etwa besprochenen besonderen Fälle lediglich zur Illustration der allgemeinen Sätze dienten, haben wir hier in der systematischen Durcharbeitung jener Sätze durch alle Teile der Physik den Zweck unserer Darstellung zu suchen, durch welche dann allerdings auch andrerseits wieder die Prinzipien selber in ein helleres Licht gesetzt werden. Was aber die hier vorzunehmenden Anwendungen ihrem Wesen nach von den im vorigen Abschnitt gemachten prinzipiellen Auseinandersetzungen unterscheidet, ist der Umstand, daß sie nicht, wie jene, ihre Bedeutung stets unveränderlich beibehalten, sondern daß sie sich mit der fortschreitenden Entwicklung unserer physikalischen Anschauungen selber in gewisser Weise modifizieren können; es ist daher um so wichtiger, diesen Punkt besonders hervorzuheben, damit nicht etwa die früher gewonnenen Resultate, die immer in gleicher Weise fortbestehen, einmal gefährdet erscheinen. Die Definition des Begriffes und das Prinzip der Erhaltung der Energie gilt unveränderlich für alle Zeiten, doch die Form

seiner Anwendung auf eine konkrete Naturerscheinung unterliegt einem Wechsel, und zwar deshalb, weil der Begriff der Energiearten (nicht ihr in Zahlen ausgedrückter Wert) ganz von dem Charakter der jeweiligen Naturanschauung abhängig ist. Hierfür bietet schon die geschichtliche Entwicklung der Physik mehr als ein Beispiel dar: wie oft haben die Vorstellungen über das Wesen der in der Natur wirksamen Agentien gewechselt; und auch in unserer Darstellung haben wir Gelegenheit gehabt, diese Tatsache hervorzuheben (S. 141 f.). Welchem Endziel dieser stete Wechsel in der Auffassung des Wesens der Naturkräfte zustrebt, ist schwer zu sagen: bei dem gegenwärtigen Entwicklungszustand der Physik liegt das Hauptmoment in dem Streben nach Zurückführung aller Naturerscheinungen auf mechanische Veränderungen; gleichzeitig fängt auch eine andere Tendenz an sich geltend zu machen, nämlich die, alle direkte Wirkung in die Ferne zu ersetzen durch Kräfte, die nur in unendlich kleinen Entfernungen merkliche Größe haben. Wir werden im folgenden wiederholt, besonders bei der Besprechung der elektrischen und der magnetischen Energie, Veranlassung nehmen, auf dieses beständige Fluktuieren der Grundbegriffe unserer Naturauffassung zurückzukommen, — ein Fluktuieren, das übrigens nicht als ein Hin- und Herschwanken, sondern als ein beständiges Fortschreiten in einer bestimmten Richtung anzusehen ist; denn darin, daß sich eine Veränderung der Auffassung als notwendig herausstellt, liegt jedesmal zugleich eine Steigerung der Genauigkeit der beschriebenen Naturerscheinungen, und somit eine Steigerung der Erkenntnis begründet.

Für unsere gegenwärtigen Zwecke wollen wir von dem eben Ausgeführten das Eine festhalten, daß es, bevor man an die Anwendung des Prinzips der Erhaltung der Energie auf eine bestimmte Naturerscheinung geht, vor allem notwendig ist, sich von vorneherein durch Erfahrung gewisse Vorstellungen über die Natur der zu untersuchenden Er-

scheinungen zu verschaffen, und dieselben bei den folgenden Betrachtungen konsequent festzuhalten. Nur auf diese Weise kann man sich von Fehlern vollkommen frei halten und namentlich der Gefahr entgehen, eine gewisse Energieart entweder ganz zu übersehen, oder, was auch vorkommen kann, aus Versehen doppelt in Rechnung zu bringen.

Je nach der Genauigkeit der beanspruchten Resultate wird man die Vorstellung, von der man ausgeht, einfacher oder komplizierter gestalten. Operiert man z. B. mit einer tropfbaren Flüssigkeit, so genügt es für gewisse Zwecke schon, sich dieselbe als vollständig inkompressibel zu denken und die Sätze, die sich aus dem Prinzip der Energie für inkompressible Flüssigkeiten ableiten lassen, in Anwendung zu bringen. Im Interesse größerer Genauigkeit liegt es jedoch, sich die Kräfte, die im Innern der Flüssigkeit wirken, als durch Veränderungen der Dichte hervorgerufen zu denken. Aber selbst mit dieser Vorstellung wird man in manchen Fällen nicht auskommen, sondern man wird sich genötigt sehen, den angenommenen Druckkräften noch gewisse andere hinzuzufügen, nämlich die, welche aus der sogenannten Zähigkeit der Flüssigkeit entspringen, und die wir mit dem Namen der „Reibung" charakterisieren. Hiermit ist die Reihe der Steigerungen der Genauigkeit des Resultates noch nicht erschöpft. Hat man bisher die Flüssigkeit als ein Kontinuum angenommen, so lehrt eine genauere Betrachtung, daß sie in den kleinsten Teilchen diskontinuierliche Eigenschaften zeigt, und die Berücksichtigung derselben erfordert ein noch näheres Eingehen auf die zur Wirksamkeit kommenden Kräfte, die dann als Molekularkräfte auftreten. Jeder dieser verschiedenen genannten Vorstellungen entspricht eine besondere Form der Energiearten und also eine verschiedene Anwendung des Prinzips der Erhaltung der Energie; dabei werden um so genauere Resultate erhalten, freilich auf Kosten der Einfachheit der Rechnung, je höher in der aufgezählten Reihenfolge die

Stellung ist, welche die zugrunde gelegte Anschauung einnimmt.

Um nun den Standpunkt, von dem man bei der Berechnung ausgehen will, gehörig zu charakterisieren, ist es nötig, sich über die Zahl und die Art der unabhängigen Variabeln, von denen man die zu untersuchenden Zustände des betrachteten materiellen Systems abhängen lassen will, genau zu orientieren; je kleiner diese Zahl, um so einfacher die Anschauung und die Rechnung. Die Energie des Systems wird sich dann immer als eine bestimmte Funktion dieser unabhängigen Variabeln darstellen, wobei es vollkommen gleichgültig bleibt, ob diese Funktion auch wirklich der „primären" (S. 124) Form der Energie entspricht oder nicht. Vgl. hierüber auch S. 128 f.

Im übrigen bedienen wir uns bei den kommenden Berechnungen der im vorigen Abschnitt abgeleiteten Sätze, von denen wir die hauptsächlichsten hier noch einmal zusammenstellen wollen:

1. Die einer bestimmten Zustandsänderung eines materiellen Systems entsprechende Änderung seiner Energie ist gleich dem Arbeitswert der Wirkungen, welche außerhalb des Systems aufgewendet werden müssen, um die Zustandsänderung auf irgend eine Weise hervorzubringen (S. 135). Finden also keine äußeren Wirkungen statt, so bleibt die Energie des Systems ungeändert.

2. Die Änderung der Energie eines bestimmten Volumens ist bedingt einerseits durch die äußeren Wirkungen auf die in dem Volumen enthaltene Materie, andrerseits durch den Eintritt neuer Materie in das Volumen (S. 140).

3. Die Energie eines materiellen Systems ist die Summe der einzelnen in dem System vorhandenen voneinander unabhängigen Energiearten, und jede äußere Wirkung verändert nur die Energieart, die ihr gerade entspricht.[1]) (Prinzip der Superposition, S. 143.)

1) [Anm. 1908. Dieser Satz ist, so vorzügliche Dienste er

1. Mechanische Energie.

Das einfachste materielle System ist ein materieller Punkt, dessen innere Beschaffenheit allein durch seine unveränderliche Masse m bestimmt ist. Seine Energie ist die lebendige Kraft:

$$\frac{m}{2}\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right\}$$

plus einer willkürlichen Konstanten, die wir, wie es gewöhnlich geschieht, gleich 0 setzen.

Die lebendige Kraft bleibt nach dem Prinzip der Erhaltung der Energie konstant, so lange keine Wirkungen von außen her auf den Punkt stattfinden. Tritt aber eine äußere Wirkung ein, d. h. werden von anderen materiellen Punkten her Kräfte auf den betrachteten Punkt ausgeübt, so rufen dieselben in einem gewissen Zeitraum eine Änderung der Energie des Punktes hervor, deren Größe gegeben ist durch den Arbeitswert dieser Wirkungen, d. h. durch die Arbeit, welche die Kräfte in der angenommenen Zeit an dem betrachteten Punkte leisten, und zwar gilt dies ganz allgemein, aus welcher Quelle auch die genannten Kräfte stammen mögen (S. 135f.). Beschränken wir die Anwendung auf ein Zeitelement dt, so hat die Summe der entsprechenden Arbeiten aller Kräfte, die auf den Punkt wirken, die Form:

$$Xdx + Ydy + Zdz,$$

wobei X, Y, Z die Komponenten der resultierenden Kraft sind, genommen nach den Richtungen der 3 Koordinatenachsen. Aus der Benutzung des angeführten Satzes ergibt sich nun, daß das Wachstum der Energie in der unendlich kleinen Zeit dt, also das Differential des obigen Ausdrucks der lebendigen Kraft, gleich ist der hier angegebenen Arbeits-

---

bei der ersten Orientierung leistet, doch im allgemeinen nur als eine Annäherung aufzufassen, wie auch schon oben S. 145 hervorgehoben wurde; denn er scheint um so weniger anwendbar zu sein, je größere Anforderungen man an die Genauigkeit stellt.]

größe. Somit hätten wir durch die Anwendung des Prinzips der Erhaltung der Energie eine Gleichung gefunden, der die Bewegung des Punktes gehorcht; indes reicht diese eine Gleichung noch nicht aus, um die Abhängigkeit jeder der 3 Veränderlichen x, y, z von der Zeit t zu bestimmen.

Wir können uns aber die erforderliche Anzahl von Gleichungen verschaffen durch die Anwendung des Satzes, den wir oben unter 3. reproduziert haben. Beachten wir, daß der Ausdruck der Energie des betrachteten Punktes sich darstellt als eine Summe von 3 symmetrisch gebauten Gliedern, deren jedes sich auf eine bestimmte Koordinatenrichtung bezieht und allein von der betreffenden Variabeln abhängt. Die Gesamtenergie setzt sich also zusammen aus 3 voneinander unabhängigen Energiearten. Ganz dieselbe Eigenschaft bemerken wir aber auch bei dem Ausdruck der Arbeit der von außen wirkenden Kräfte. Auch diese Größe zerfällt in 3 Summanden, deren jeder einer bestimmten Koordinatenachse entspricht und einen von den beiden andern unabhängigen Wert hat; jede der einzelnen äußeren Wirkungen ist also einer bestimmten einzelnen Energieart zugeordnet. Es liegt nun nahe anzunehmen, daß nicht nur die Veränderung der Gesamtenergie gemessen wird durch die Gesamtarbeit der äußeren Kräfte, sondern daß noch spezieller jede der genannten Einzelenergien nur von der ihr gerade entsprechenden Einzelwirkung beeinflußt wird, ganz unabhängig von den beiden andern. Nehmen wir diesen Gedanken als richtig an, so zerfällt die eine oben angeführte Gleichung in 3 einzelne, deren jede sich auf eine bestimmte Koordinatenrichtung bezieht:

$$d\left\{\frac{m}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right\} = X dx$$

$$d\left\{\frac{m}{2}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right\} = Y dy$$

$$d\left\{\frac{m}{2}\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right\} = Z dz$$

und durch Ausführung der Differenziation ergeben sich die Newtonschen Bewegungsgleichungen:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = Y$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = Z$$

welche zur Darstellung der ganzen Bewegung genügen.

Selbstverständlich kann diese Ableitung keinen Anspruch erheben auf den Rang eines Beweises der beiden ersten Newtonschen Axiome, da der benutzte Satz der Übereinanderlagerung der Energien nicht a priori angewendet werden kann. Seine Bedeutung beruht vielmehr, wie wir schon S. 146 ausführlicher hervorgehoben haben, und wie auch in der letzten Darstellung betont ist, wesentlich auf seinem heuristischen Wert. Ebenso wie hier die drei Koordinatenrichtungen den Grund liefern zur Einteilung sowohl der Energie als auch der äußeren Wirkungen in die entsprechenden Teile, so haben wir ein anderes Mal andere Gesichtspunkte, etwa thermischer oder elektrischer Natur, welche eine Zerlegung der Wirkungen in verschiedene voneinander gänzlich unabhängige Einzelglieder bedingen, die sich dann einfach durch Addition zur Gesamtwirkung zusammensetzen. Wo diese Zerlegung aber wirklich durchführbar ist und zu richtigen Folgerungen führt, kann nur die Erfahrung lehren; denn daß z. B. die Wirkungen nach den 3 Koordinatenrichtungen unabhängig voneinander erfolgen, ist doch auch ein Erfahrungssatz, über den wir unter keinen Umständen, bei keiner Darstellungsart, hinauskommen. Gibt man ihn jedoch einmal zu, so wird die obige Ableitung aus dem Prinzip der Erhaltung der Energie vollkommen streng.

Nachdem wir gesehen haben, daß die beiden ersten Newtonschen Axiome sich aus den von dem Energieprinzip

gelieferten Sätzen entwickeln lassen, erhebt sich die Frage, ob es nicht überhaupt im Interesse einer noch rationelleren Auffassung der Mechanik gelegen sei, bei der Darstellung derselben einen dem eben angewandten ähnlichen Ausgangspunkt definitiv an Stelle des jetzt gebräuchlichen zu setzen. Gegenwärtig pflegt man fast allgemein die Mechanik mit dem Satze der Proportionalität von Kraft und Beschleunigung einzuleiten, sei es nun, daß man, mit Newton und W. Thomson[1]), den Begriff der Kraft in letzter Linie auf den des Druckes, wie er uns durch den Muskelsinn, (Tastsinn, Gefühlssinn) direkt übermittelt wird, zurückführt, oder daß man, mit Kirchhoff[2]), gleich von vorneherein durch Definition Kraft und Beschleunigung identifiziert, wobei dann allerdings der Kraftbegriff an Bedeutung verliert, da auf die Empfindungen des Muskelsinns keine Rücksicht genommen wird. Aus der Kraft wird dann die Arbeit, die Energie usw. hergeleitet. Dem gegenüber steht die andere, zuerst von Huygens[3]) kultivierte Auffassung, die den Begriff der Energie (Arbeit, lebendige Kraft) an die Spitze der Mechanik stellt, und die anderen Grundbegriffe, so namentlich den der Kraft, in eine sekundäre Stellung weist. Augenscheinlich hat der letztere Standpunkt den Vorzug für sich voraus, daß der für ihn charakteristische Begriff der Energie eine für alle verschiedenen Zweige der Physik definierte Größe ist, so daß man nicht nur die Mechanik, sondern auch die Theorie der Wärme, der Elektrizität usw. auf den nämlichen Begriff gründen kann, wodurch ohne Zweifel eine einheitlichere, höhere Auffassung der physi-

---

1) W. Thomson und P. G. Tait: Handbuch der theoretischen Physik. Deutsch von H. Helmholtz und G. Wertheim. Braunschweig 1871, I, § 207.

2) G. Kirchhoff: Vorlesungen über mathematische Physik. Mechanik. Leipzig 1877, p. 5, 23.

3) E. Mach: Zur Geschichte des Arbeitsbegriffes. Wien. Ber. (2) 68, p. 479, 1873.

kalischen Erscheinungen bedingt ist, und ich glaube auch, daß über kurz oder lang sich diese Auffassung allenthalben Bahn brechen wird, sobald wir uns nur erst einmal durch vielfache Übung etwas mehr an diesen verhältnismäßig noch zu wenig gebrauchten Begriff gewöhnt haben werden; jedoch ist andrerseits wohl zu beachten, daß der Begriff der Kraft, auf den sich seit Newton die Mechanik ausschließlich aufbaut, einen Vorzug aufzuweisen hat, welcher dem der Energie mangelt: es ist der Umstand, daß wir einen Sinn besitzen, den Muskelsinn, durch welchen wir einen Druck zwar nicht exakt messen, wohl aber unmittelbar empfinden können, während uns ein Energiesinn ganz und gar abgeht; dieser Umstand ist auch ohne Zweifel mit ein Grund gewesen, weshalb im Verlauf der geschichtlichen Entwicklung der Mechanik der Begriff der Kraft den der Arbeit so in den Hintergrund zu drängen und seinerseits das entschiedene Übergewicht zu erringen vermochte. Die Kraft erscheint uns, wenigstens in der Newtonschen Auffassung, als das primäre, als die Ursache, die Bewegung aber, die Arbeitsleistung usw. als die Wirkung, obwohl doch Kraft und Beschleunigung der Zeit nach zusammenfallen, und das aus keinem anderen Grunde, als weil, wenn wir einen Körper durch Muskelaktion fortbewegen, der physiologische Vorgang in uns der eintretenden Bewegung in der Tat zeitlich vorausgeht. Wenn sich nun ein Körper unabhängig von unserer Muskeltätigkeit, etwa durch Attraktion eines anderen, in Bewegung setzt, so können wir uns doch immer vorstellen, daß wir, nach Beseitigung des anziehenden Körpers, die nämliche Beschleunigung durch eigene Anstrengung hervorrufen, und insofern auch in diesem Falle in ganz bestimmtem Sinne von einer Kraft sprechen, welche diese Bewegung hervorruft. Daß wir ein quantitatives Maß dieser Kraft erst durch Beobachtung der eingetretenen Bewegung gewinnen können, liegt nur an der Unvollkommenheit unseres Muskelsinns und ändert an dem Begriff der Kraft nichts.

Da wir nach dem Gesagten, in Übereinstimmung mit der geschichtlichen Entwicklung, die wesentliche Bedeutung des Kraftbegriffes in seinem Zusammenhang mit den uns durch den Muskelsinn vermittelten Empfindungen erblicken, so können wir uns auch nicht entschließen, mit Kirchhoff und anderen durch Aufhebung dieses Zusammenhangs den Begriff der Kraft zu einem rein kinematischen zu stempeln. Gewiß ist zuzugeben, daß aus dem Begriff der Beschleunigung allein sich ein großer Teil der Mechanik konstruieren läßt, vor allem die ganze Astronomie, und überhaupt alle diejenigen Bewegungsvorgänge, die nur durch das Auge wahrgenommen werden. Aber die Physik hat es doch mit der Beschreibung aller Erscheinungsformen zu tun, nicht nur derer, die uns durch den Bewegungssinn, sondern auch derer, die uns durch den Muskelsinn, den Temperatursinn, den Farbensinn usw. vermittelt werden, und dementsprechend sind die fundamentalen physikalischen Begriffe direkt aus den spezifischen Sinnesempfindungen abzuleiten. Exakt messen können wir zwar eine Temperatur ebensowenig durch den Temperatursinn, wie eine Kraft durch den Muskelsinn, oder eine Farbennüance durch den Farbensinn, weil dazu die Schärfe unserer Sinnesempfindungen nicht ausreicht, sondern wir müssen uns zur Erreichung dieses Zweckes nach anderen Erscheinungen umsehen, die erfahrungsgemäß mit den genannten Empfindungen in einem notwendigen Zusammenhang stehen und den Vorteil einer quantitativen Messung darbieten, das sind in der Regel Bewegungserscheinungen: bei der Temperatur die Ausdehnung, bei der Kraft die Beschleunigung, bei der Farbe die Wellenlänge usw.; aber deshalb werden wir uns doch nicht veranlaßt sehen, Temperatur, Kraft, Farbe usw. für kinematische Begriffe zu erklären. So wenig wir mit dem Worte „blau" in erster Linie die mechanische Vorstellung einer bestimmten Schwingungszahl oder einer bestimmten Wellenlänge des Äthers verbinden, die uns doch allein das exakte objek-

kalische Maß der Farbe liefert, ebenso sollten wir, wenn wir von der „Anziehungskraft" eines Magneten auf ein Stück Eisen reden, zunächst nicht an die mit der Masse multiplizierte Beschleunigung denken, die der Magnet dem Eisen erteilt, sondern vielmehr an die, allerdings nicht zur exakten Messung geeignete, Empfindung, die wir in den Muskeln verspüren, wenn wir, anstatt durch den Magneten, durch eigene Aktion dem Eisen die nämliche Beschleunigung erteilen. Indem Kirchhoff in seiner bewunderungswürdigen Darstellung der Mechanik den Begriff des Kausalzusammenhangs auf das zurückführte, was er wirklich bedeutet, nämlich die Notwendigkeit der zeitlichen Aufeinanderfolge, glaubte er leider zugleich auch die durch den Muskelsinn vermittelten Empfindungen aus dem Fundament der Mechanik entfernen zu müssen, obwohl dieselben uns doch mit genau dem gleichen Rechte zu physikalischen Begriffen verhelfen wie etwa die Empfindungen des allerdings verhältnismäßig schärferen Gesichtssinnes. — Für den gegenwärtigen Stand der Mechanik dürfte es allerdings im wesentlichen auf das Nämliche hinauskommen, ob man den Begriff der Kraft von vorneherein mit den Empfindungen des Muskelsinns in Zusammenhang bringt oder ob man diesen Zusammenhang erst hinterher einführt (denn daß er überhaupt einmal eingeführt werden muß, ist selbstverständlich, schon mit Rücksicht auf die Theorie der ersten und ältesten Maschinen: derer, die durch Muskelkraft bewegt werden); aber die Mechanik ist ja ebensowenig wie irgend ein anderer Teil der Physik eine abgeschlossene Wissenschaft, wenn sie auch auf einer verhältnismäßig sehr hohen Stufe steht: während die einmal beobachteten Tatsachen bleiben, und durch fortwährend neue ergänzt und vervollständigt werden, können die Anschauungen in oft ungeahnter Weise wechseln. Der einzige feste und unangreifbare Ausgangspunkt liegt für uns anerkanntermaßen in den durch die Sinnesempfindungen gelieferten Erscheinungen, und es dürfte daher in hohem

Grade rationell sein, uns auch die Benutzung aller unserer Sinne zur steten Verfügung zu halten und nicht von vorneherein auf die Verwertung eines derselben zu verzichten, der für das Verständnis und die Entwicklung des Begriffes der Kraft, wie schon der Name „Kraft" besagt, der Wissenschaft bisher die wichtigsten Dienste geleistet hat und mutmaßlich noch leisten wird.

Kommen wir nun zurück auf die oben angeregte Frage, ob es für die Darstellung der Mechanik zweckmäßiger sei, das Gesetz der Proportionalität von Kraft und Beschleunigung aus dem Prinzip der Erhaltung der Energie abzuleiten, oder umgekehrt, so möchten wir uns in Wiederholung unserer schon oben ausgesprochenen Ansicht für das erstere entscheiden; dagegen scheint es uns im Hinblick auf die soeben erörterte Unmittelbarkeit des Kraftbegriffes unerläßlich, den Begriff der Arbeit erst auf den der Kraft zu gründen (ganz unabhängig von der Beschleunigung), und hierauf, nach Formulierung dieses Begriffs, zur Anwendung des Satzes der Erhaltung der Energie zu schreiten, woraus dann die Proportionalität von Kraft und Beschleunigung resultiert. Wie das im einzelnen durchzuführen wäre, wollen wir nicht ausführlicher darzulegen versuchen, zumal hier dem individuellen Geschmack ein gewisser Spielraum gelassen ist. Nur einen Punkt, auf den wir besonderes Gewicht legen, möchten wir noch hervorheben, nämlich daß sich die hier dargelegte Auffassung auf das engste anschließt an die Methode, welche in anderen Teilen der Physik, namentlich in der Theorie der Wärme, bereits mit bestem Erfolge benutzt wird. Wir leiten die Wirkungen der Wärme ab aus dem Prinzip der Erhaltung der Energie, resp. dem Satz von der Äquivalenz von Wärme und Arbeit, und doch ist in der Wärmelehre der Begriff der Wärmemenge nicht das ursprünglich Gegebene, da wir für ihn, ebenso wie für die Arbeit, keinen spezifischen Sinn besitzen, sondern wir gelangen zu ihm nur durch den Temperaturbegriff, der uns direkt durch

den Temperatursinn geliefert wird, ebenso wie der Kraftbegriff durch den Muskelsinn, oder, wie wir auch geradezu sagen können: Kraftsinn. In dieser Beziehung sind wir also merkwürdigerweise in der Wärmetheorie schon zu etwas reiferen Anschauungen gelangt als in der Mechanik; denn es wird mit der Zeit dahin kommen müssen, daß wir auch in der Mechanik die Energie auffassen als das primär vorhandene, und die Kraft als eine Äußerung dieser, potenziellen oder aktuellen, Energie, ebenso wie wir jetzt schon die Temperatur als eine Äußerung der Wärme betrachten. Wo keine Energie ist, kann weder eine Kraft-, noch eine Temperatur-, noch irgend eine andere Empfindung zustande kommen. —

Ehe wir von der Behandlung der Bewegung eines einzigen freien materiellen Punktes abgehen, wollen wir noch einen für die weitere Anwendung fruchtbaren Satz anführen. Wenn ein materieller Punkt durch Einwirkung irgend welcher Kräfte aus dem Zustand der Ruhe in den der Bewegung übergeht, so ist im ersten Zeitmoment dieser Bewegung die Gesamtarbeit der wirkenden Kräfte stets positiv. Denn da der Beginn der Bewegung immer mit einem Wachstum der Energie des Punktes (seiner lebendigen Kraft) verbunden ist, müssen die äußeren Wirkungen, welche dieses Wachstum bedingen, ebenfalls positiv sein. Derselbe Satz folgt natürlich auch unmittelbar aus der Berücksichtigung des Umstandes, daß die durch die wirkenden Kräfte hervorgebrachte Verschiebung des Punktes in die Richtung der resultierenden Kraft fällt. Wenn es sich trifft, daß der Punkt im Laufe seiner Bewegung einmal wieder an seine Ausgangsstelle zurückkommt, so wird im allgemeinen die Gesamtarbeit der Kräfte nicht gleich o sein, es wird infolgedessen der Punkt auch nicht wieder seine alte Geschwindigkeit erlangt haben; doch ist dies dann immer der Fall, wenn die Wirkungen durch Zentralkräfte veranlaßt werden, die von gewissen ruhenden Massen ausgehen; dann

existiert ein Potenzial V der wirkenden Kräfte, in der Art daß:

$$X = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad Y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad Z = -\frac{\partial V}{\partial z}.$$

In diesem Fall wird die Größe der in einer beliebigen endlichen Zeit geleisteten Arbeit gemessen einfach durch die Abnahme dieses Potenzials, einerlei, welche Bahn der Punkt beschrieben hat. Der zuletzt abgeleitete Satz lautet dann folgendermaßen: Wenn ein ruhender Punkt sich zu bewegen anfängt unter Einwirkung von Kräften, die ein nur von der Lage des Punktes abhängiges Potenzial haben, so geschieht dies immer in der Weise, daß das Potenzial abnimmt.

Gehen wir nun weiter zur Betrachtung eines materiellen Punktes, dessen Beweglichkeit durch gewisse äußere von vorneherein festgestellte Bedingungen beschränkt ist, so können wir hier zunächst zwei Arten von Kräften unterscheiden: 1) diejenigen, welche den Punkt in gewisser Weise zu bewegen streben — wir wollen sie im folgenden die treibenden Kräfte nennen, ihre Größe und Richtung ist im allgemeinen unmittelbar bekannt, und 2) diejenigen, welche durch die Existenz der festen Bedingungen hervorgerufen werden — wir nennen sie Zwangskräfte; diese Kräfte sind nur dadurch charakterisiert, daß ihre Wirksamkeit immer gerade den Erfolg hat, die festen Bedingungen unter allen Umständen aufrecht zu erhalten. Beide Arten von Kräften zusammen bestimmen die Bewegung des Punktes nach den allgemeinen Bewegungsgesetzen, die für einen freien Punkt gelten. Die Unbestimmtheit, welche noch in den Werten der Zwangskräfte enthalten ist, läßt sich durch folgenden Satz beseitigen, der auf der Zerlegung der Gesamtarbeit in die der einzelnen Kräfte beruht: Wenn die durch irgendwelche mechanische Vorrichtungen zu erzielende Verwirklichung und Aufrechterhaltung der festen Bedingungen weder mit Aufwand noch mit Erzeugung von Energie verbunden ist, so ist die Arbeit der Zwangskräfte an dem

betrachteten materiellen Punkt immer gleich o; denn in diesem Falle kann dem Punkt durch die Wirkung der festen Bedingungen keine Energie mitgeteilt werden, sonst würde diese Energie aus Nichts entstehen. Dies tritt immer ein, wenn die Bedingungen nicht von der Zeit abhängen, wenn z. B. der Punkt gezwungen ist, auf einer im Raume festen Fläche oder Kurve zu bleiben. Ein Punkt also, auf den gar keine treibenden Kräfte wirken, wird sich auf einer festen Fläche oder Kurve mit konstanter Geschwindigkeit bewegen.

Setzen wir nun, unter Festhaltung des angenommenen Falles, voraus, der Punkt befinde sich anfangs in Ruhe, gerate aber infolge der Einwirkung gewisser treibender Kräfte in Bewegung, so muß nach dem oben abgeleiteten Satz die Gesamtarbeit sämtlicher auf den Punkt wirkenden Kräfte positiv sein; da aber, wie wir eben sahen, die Arbeit der Zwangskräfte gleich o ist, so folgt, weil die Gesamtarbeit aller Kräfte die Summe der Arbeiten der einzelnen ist, der Satz, daß „bei jeder eintretenden Bewegung die Arbeit der treibenden Kräfte für sich allein positiv ist"; mit anderen Worten: die Richtung der Resultante der treibenden Kräfte bildet mit der Richtung der Bewegung, die der Punkt einschlägt, einen spitzen Winkel. Für den speziellen Fall, daß die treibenden Kräfte ein Potenzial haben, folgt, daß beim Beginn der Bewegung das Potenzial abnimmt. Hieraus ergibt sich unmittelbar der Satz der virtuellen Verrückungen: Wenn unter allen Verschiebungen, die der Punkt infolge der festen Bedingungen erleiden kann, sich keine einzige befindet, für die die Arbeit der treibenden Kräfte positiv ist, kann überhaupt gar keine Bewegung zustande kommen, dann muß Gleichgewicht bestehen; denn wäre dies nicht der Fall, würde Bewegung eintreten, so würde bei der entstehenden Verschiebung die Arbeit der treibenden Kräfte o oder negativ, was mit dem angeführten Satz unvereinbar ist. Sind XYZ wieder die Komponenten der Resultante

der treibenden Kräfte, so ist also Gleichgewicht vorhanden, wenn für jede zulässige virtuelle Verrückung δx, δy, δz die Bedingung gilt:

$$X\delta x + Y\delta y + Z\delta z \leqq 0.$$

Für den gewöhnlich vorkommenden Fall, daß die festen Bedingungen alle durch Gleichungen (nicht durch Ungleichungen) zwischen den Koordinaten des beweglichen Punktes ausgedrückt sind, wird, wenn irgend eine Verschiebung δx, δy, δz mit den Bedingungen verträglich ist, immer auch die entgegengesetzte: $-\delta x$, $-\delta y$, $-\delta z$ zulässig sein, so daß die für das Gleichgewicht geforderte Bedingung nur dann erfüllt ist, wenn für alle zulässigen Verrückungen: $X\delta x + Y\delta y + Z\delta z = 0$. Haben die treibenden Kräfte ein Potenzial, so lautet die Gleichung: $\delta V = 0$. Diese Bedingung ist immer dann erfüllt, wenn für den betreffenden Raumpunkt der Wert des Potenzials ein Maximum oder ein Minimum ist, und zwar ist unmittelbar ersichtlich, daß im ersten Fall das Gleichgewicht ein labiles, im zweiten ein stabiles ist. Denn bringt man den materiellen Punkt an eine wenig von seiner Gleichgewichtslage entfernte Stelle, so wird er nicht mehr im Gleichgewicht sein, sondern in Bewegung geraten, doch so, daß das Potenzial abnimmt. Wenn also in der Gleichgewichtslage das Potenzial ein Minimum ist, so muß er dorthin zurückkehren, im entgegengesetzten Fall ist dies unmöglich. Dazwischen gibt es Fälle, in denen das Gleichgewicht für gewisse Verschiebungen labil, für andere aber stabil ist; dann erreicht der Wert des Potenzials weder ein Maximum noch ein Minimum.

Wir haben alle diese Folgerungen mit einer gewissen Umständlichkeit abgeleitet, die durch Benutzung gewisser einfacher Sätze, z. B. daß die Zwangskraft einer festen Fläche oder Kurve stets senkrecht auf ihrer Richtung wirkt, etwas abzukürzen gewesen wäre, indes haben wir dafür den Vorteil gewonnen, die angewandte Betrachtung im wesent

lichen unverändert auf Systeme von beliebig vielen materiellen Punkten zu übertragen (s. unten). Aus dem Prinzip der virtuellen Verrückungen lassen sich bekanntlich nicht nur die Gleichgewichtsbedingungen, sondern auch die Bewegungsgleichungen des materiellen Punktes ableiten, vorausgesetzt, daß man zu den Komponenten der treibenden Kräfte noch die Größen

$$-m\frac{d^2x}{dt^2}, \quad -m\frac{d^2y}{dt^2}, \quad -m\frac{d^2z}{dt^2}$$

hinzufügt.

Wir wollen daher nun gleich übergehen zur Behandlung eines Systems von mehreren beweglichen Punkten, und zwar zunächst von zwei Punkten, um für dasselbe die Gültigkeit des Prinzips der Wirkung und Gegenwirkung abzuleiten: hierbei seien zunächst alle Wirkungen von anderen Massen ausgeschlossen. Bezeichnen wir die Koordinaten eines Punktes mit xyz, seine lebendige Kraft mit L, die Komponenten der von dem anderen Punkt her auf ihn wirkenden Kraft mit XYZ, wobei der angefügte Index 1 oder 2 dem Punkt entspricht, auf den gewirkt wird, so ist für jeden einzelnen Punkt das Wachstum seiner Energie gleich der Arbeit der auf ihn wirkenden Kraft, also:

$$dL_1 = X_1\,dx_1 + Y_1\,dy_1 + Z_1\,dz_1,$$
$$dL_2 = X_2\,dx_2 + Y_2\,dy_2 + Z_2\,dz_2.$$

Nehmen wir andererseits beide Punkte zusammen als „Grundsystem“ (S. 136) an, so sind die äußeren Wirkungen 0, und die Energie daher konstant. Diese Größe wird aber natürlich im allgemeinen nicht allein aus den lebendigen Kräften der beiden Punkte bestehen, sondern es wird hierzu noch ein Glied hinzutreten, das auch von der Lage der Punkte im Raum abhängig ist, und sich als neue Energieart neben die andere lagert. Bezeichnen wir diese Energieart, die potenzielle Energie, mit U, so haben wir: $L_1 + L_2 + U = \text{konst.}$ also

$$dL_1 + dL_2 + dU = 0.$$

Hieraus liefern die beiden oben aufgestellten Gleichungen zusammengenommen:

$$X_1 dx_1 + Y_1 dy_1 + Z_1 dz_1$$
$$+ X_2 dx_2 + Y_2 dy_2 + Z_2 dz_2 = - dU.$$

Die Gesamtarbeit der wirkenden Kräfte bildet also das vollständige zeitliche Differential einer nur von dem augenblicklichen Zustande (Lage und Geschwindigkeit) der beiden Punkte abhängigen Funktion, und diese Bedingung ist geeignet, gewisse notwendige Eigenschaften der Kräfte abzuleiten.

Lassen wir zunächst U nicht nur von der Lage, sondern auch von der Geschwindigkeit der beiden Punkte abhängen, so würde $\frac{dU}{dt}$ auch die Beschleunigung in sich enthalten, woraus nach der letzten Gleichung folgt, daß die Kräftekomponenten XYZ ebenfalls von der Beschleunigung abhängen müßten. Diese Annahme findet sich in der Tat durchgeführt in den Grundgesetzen, welche W. Weber[1]), B. Riemann[2]) und R. Clausius[3]) für die Wirkung zweier elektrischer Punkte aufeinander aufgestellt haben. Allerdings wird hierdurch sowohl die Vorstellung von der Wirkungsweise der Kräfte als auch die Rechnung selber sehr viel komplizierter, und da die Annahme dieser Gesetze keineswegs notwendig erscheint, vielmehr gegen jedes einzelne derselben noch besondere anderweitige Gründe sprechen,

---

1) W. Weber: Elektrodynamische Maßbestimmungen, Abh. d. k. sächs. Ges. d. Wiss. X, p. 1, 1871. Vgl. auch Pogg. Ann. Jubelband, p. 212, 1874.

2) B. Riemann: Schwere, Elektrizität und Magnetismus, bearbeitet v. Hattendorff, Hannover 1876, p. 326.

3) R. Clausius: Über ein neues Grundgesetz der Elektrodynamik. Pogg. Ann. 156, p. 657, 1875. Crelle J. 82, p. 85, 1876. Die mechanische Behandlung der Elektrizität. Braunschweig 1879, p. 277.

so wollen wir hier den angenommenen Fall nicht weiter ausführen.

Dann bleibt nichts anderes übrig, als anzunehmen, daß U nur von der Lage der beiden wirkenden Punkte abhängt, und zwar, wie wir gleich hinzufügen können, von ihrer Entfernung r, da dies die einzige physikalische Größe ist, welche durch die Lage der beiden Punkte vollständig definiert wird. Wir haben also:

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial U}{\partial y_1} dy_1 + \frac{\partial U}{\partial z_1} dz_1 + \frac{\partial U}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial U}{\partial y_2} dy_2 + \frac{\partial U}{\partial z_2} dz_2$$

wobei

$$U = f(r).$$

Wenn nun auch die Glieder, in die das Differential dU zerfällt, den Größen einzeln zugeordnet erscheinen, aus denen sich der obige Ausdruck der Arbeit ($= -dU$) zusammensetzt, so ist man deshalb noch nicht berechtigt, je zwei entsprechende Glieder einander gleich zu setzen, also

$$X_1 = -\frac{\partial U}{\partial x_1}, \quad Y_1 = -\frac{\partial U}{\partial y_1},$$
$$= -\frac{\partial f(r)}{\partial x_1}, \qquad = -\frac{\partial f(r)}{\partial y_1} \text{ usw.}$$

zu machen. Dies wäre nur dann geboten, wenn 1) die Differenziale dx_1 dy_1 .... untereinander gänzlich unabhängig wären, und zugleich 2) die Größen X_1 Y_1 .... von diesen Differenzialen (d. h. von den Geschwindigkeiten) unabhängig wären. Denn wenn eine von diesen beiden Bedingungen nicht erfüllt ist, lassen sich immer von 0 verschiedene Größen auffinden, welche zu den eben angegebenen Werten der Komponenten X_1 Y_1 .... hinzugefügt werden können, ohne daß dadurch der Wert der Arbeit: $X_1\,dx_1 + Y_1\,dy_1 + \ldots$, also auch der von dU, geändert wird. Diese „Zusatz"kräfte haben also die Eigenschaft, daß die

von ihnen geleistete Arbeit gleich o ist. Solcher Kräfte lassen sich in der Tat verschiedene namhaft machen, und zwar zerfallen sie, entsprechend den beiden angeführten Bedingungen, in zwei gesonderte Arten. Die einen, welche aus einer Abhängigkeit der Koordinaten voneinander entspringen, rühren her von dem Bestehen fester Bedingungen zwischen den beiden wirkenden Punkten, sie spielen wegen der Bequemlichkeit ihrer mathematischen Behandlung in der Mechanik eine bedeutende Rolle, und wir werden auf sie später noch etwas eingehender zurückkommen, hier wollen wir aber das Eine hervorheben, daß diese Art Kräfte (wir haben sie oben als Zwangskräfte bezeichnet) in der Natur durchaus keine primäre Existenz haben, sondern sich stets in letzter Linie auflösen lassen in solche Kräfte, welche durch den Zustand der Punkte selbständig gegeben sind; denn jede feste Bedingung kann in der Natur nur durch gewisse mechanische Mittel hergestellt werden, also durch passende Gruppierung passender Körper, und indem wir diese Körper auflösen in ihre einzelnen Punkte, zerlegen wir die Zwangskräfte in ihre Elemente, welche alle durch „treibende" (S. 175) Kräfte dargestellt werden. In letzter Linie muß jeder Punkt als frei beweglich betrachtet werden.[1])

Es bleibt also nur noch die andere Art von Zusatzkräften zu besprechen übrig: Kräfte, die von den Geschwindigkeiten der beiden freien Punkte derart abhängen, daß ihre Gesamtarbeit an beiden Punkten immer gleich o ist, wir nennen ihre Komponenten $X_1' Y_1' Z_1' X_2' Y_2' Z_2'$. Unbedenklich können wir annehmen, daß die Größe dieser Kräfte nicht von den absoluten Koordinaten und Geschwindigkeiten, sondern nur von den relativen Werten abhängt,

1) [Anm. 1908. Dies ist auch jetzt noch meine Ansicht. Doch ist dieselbe oben in zu apodiktischer Form vorgetragen. H. Hertz hat in seinen Prinzipien der Mechanik (Leipzig, J. A. Barth, 1894) einen gerade entgegengesetzten Standpunkt entwickelt.]

da die ersteren überhaupt keine physikalische Bedeutung haben. Soll dann die Arbeit dieser Kräfte:

$$X_1'dx_1 + Y_1'dy_1 + Z_1'dz_1 + X_2'dx_2 + Y_2'dy_2 + Z_2'dz_2$$

identisch verschwinden, so haben wir, wie sich leicht zeigen läßt:

$$X_1' = -X_2', \quad Y_1' = -Y_2', \quad Z_1' = -Z_2',$$

also die Kräfte an beiden Punkten an Größe gleich, an Richtung, die beliebig ist, entgegengesetzt. Setzen wir zur Abkürzung:

$$x_1 - x_2 = x, \quad y_1 - y_2 = y, \quad z_1 - z_2 = z,$$

so ist noch die Bedingung zu befriedigen:

$$X_1'dx + Y_1'dy + Z_1'dz = 0.$$

Die allgemeine Lösung dieser Gleichung ist:

$$\left.\begin{aligned} X_1' &= Q\frac{dz}{dt} - R\frac{dy}{dt} \\ Y_1' &= R\frac{dx}{dt} - P\frac{dz}{dt} \\ Z_1' &= P\frac{dy}{dt} - Q\frac{dx}{dt} \end{aligned}\right\}$$

wobei P, Q, R beliebige Funktionen der (relativen) Koordinaten und Geschwindigkeiten darstellen. Auf die Verträglichkeit derartiger Kräfte mit dem Prinzip der Erhaltung der Energie hat Lipschitz[1]) aufmerksam gemacht. Spezialisieren wir die Ideen noch etwas mehr, um eine deutlichere Vorstellung von dem Wesen dieser Kräfte zu gewinnen, so wäre zunächst noch die Bedingung zu befriedigen, daß bei einer Drehung des Koordinatensystems um den Anfangspunkt ebensowenig eine Änderung der Abhängigkeit der Kräftekomponenten von den Koordinaten und deren Differenzialquotienten eintritt, wie wir dies schon für eine Parallel-

1) H. v. Helmholtz: Wiss. Abh. I, p. 70.

verschiebung der Koordinatenachsen angenommen haben. Diese Bedingung wird erfüllt, wenn wir setzen:

$$P = \frac{\partial \rho}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial \rho}{\partial y}, \quad R = \frac{\partial \rho}{\partial z},$$

wobei ρ eine beliebige Funktion von r darstellt. Wird ρ umgekehrt proportional der Entfernung r genommen, so geht die hierdurch definierte Kraft über in diejenige, welche ein ruhendes Stromelement nach Ampère auf einen ruhenden Nordpol ausübt, vorausgesetzt, daß die Stromkomponenten proportional den Größen $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ angenommen werden. Eine derartige Kraft ist also sehr wohl vorstellbar; da sie aber nach einem weniger einfachen Gesetz wirkt, als die Zentralkräfte, so würde man ihr erst dann eine primäre physikalische Existenz zuschreiben, wenn es sich zeigen sollte, daß gewisse in der Natur beobachtete Bewegungserscheinungen ohne sie nicht zustande kommen können; dies ist bis jetzt nicht der Fall gewesen.

Man darf hier nicht die erwähnte Wechselwirkung zwischen Stromelementen und magnetischen Polen als Beweis für das Vorhandensein solcher Kräfte anführen; denn jene Wirkungen bedeuten nichts weiter als eine kurze und bequeme Zusammenfassung der Kräfte, welche geschlossene Ströme und vollständige Magnete aufeinander ausüben; ein vollständig isoliertes Stromelement hat überhaupt keine physikalische Existenz. Erst dann wäre die Einführung der fraglichen Kräfte berechtigt und geboten, wenn in der Wechselwirkung zweier oder mehrerer von äußeren Einflüssen vollständig isolierter Punkte oder Körper eine Erscheinung konstatiert werden könnte, die jenen Kräften eigentümlich wäre. Eine solche Erscheinung würde sich leicht verraten: zwar genügen die fraglichen Kräfte dem Satz von der Erhaltung der Bewegung des Schwerpunktes, weil sie an je zwei Punkten mit gleicher Größe und in entgegengesetzten Richtungen wirken, aber sie widersprechen

dem Satz von der Erhaltung der Flächen, weil ihre Richtungen nicht mit der Verbindungslinie der Punkte zusammenfallen, sondern auf ihr senkrecht stehen und daher ein Drehungsmoment liefern. Während also die lebendige Kraft der Bewegung konstant bleibt, ändert sich fortwährend die Summe der Momente der Bewegungsgrößen in bezug auf eine feste Achse. Mithin würde jede etwa beobachtete Abweichung der Bewegung irgend eines Punktsystems, das keinen äußeren Wirkungen unterworfen ist, von dem Gesetz der Flächen zur Annahme der hier besprochenen Kräfte führen müssen.

Da die Richtung dieser Kräfte nicht in die der Verbindungslinie der beiden Punkte fällt, zwischen denen sie wirken, so stehen sie auch in Widerspruch mit dem Prinzip der Wirkung und Gegenwirkung und werden daher hinfällig, sobald man dies Prinzip als allgemein gültig voraussetzt. Auf diese Weise hat Helmholtz[1]) sich ihrer entledigt; wir möchten hier jedoch der Gleichförmigkeit der Behandlung halber das Prinzip von Wirkung und Gegenwirkung nicht unmittelbar als gegeben hinstellen, sondern vielmehr darlegen, unter welchen Voraussetzungen sich dasselbe als eine Folge des von uns überall durchgeführten Energieprinzips erweist. Gehen wir aus von der obigen Gleichung der Erhaltung der Energie:

$$X_1 dx_1 + Y_1 dy_1 + Z_1 dz_1 + X_2 dx_2 + Y_2 dy_2 + Z_2 dz_2 = - dU,$$

wobei

$$U = f(r),$$

also

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x_1} d(x_1 - x_2) + \frac{\partial U}{\partial y_1} d(y_1 - y_2) + \frac{\partial U}{\partial z_1} d(z_1 - z_2),$$

so können wir zunächst ohne weiteres annehmen, daß die Kräftekomponenten nur von den relativen Koordinaten

1) H. v. Helmholtz: Wiss. Abh. I, p. 70.

$$x_1 - x_2, \quad y_1 - y_2, \quad z_1 - z_2$$

abhängen, da ihre Größe durch eine Parallelverschiebung der Koordinatenachsen nicht geändert wird. Dann wird notwendig:

$$X_1 + X_2 = 0, \quad Y_1 + Y_2 = 0, \quad Z_1 + Z_2 = 0,$$

und:

$$X_1 d(x_1 - x_2) + Y_1 d(y_1 - y_2) + Z_1 d(z_1 - z_2) = - dU.$$

Wenn wir nun nicht nur die beiden ganzen Ausdrücke für dU, sondern auch je zwei entsprechende Glieder dieser Ausdrücke einander gleich setzen, so erhalten wir das Resultat:

$$X_1 = - \frac{\partial U}{\partial x_1} = - \frac{\partial f(r)}{\partial r} \cdot \frac{x_1 - x_2}{r} \text{ usw.}$$

d. h. die von beiden Punkten ausgehenden Kräfte sind einander gleich und entgegengesetzt, und ihre Richtungen fallen mit der Verbindungslinie zusammen. Das Prinzip der Wirkung und Gegenwirkung (3. Axiom von Newton) folgt also aus dem Prinzip der Erhaltung der Energie mit Hilfe der Annahme, daß nicht nur die Gesamtarbeit der zwischen zwei Punkten wirkenden Kräfte die Veränderung ihrer potenziellen Energie ausdrückt, sondern daß auch jeder einzelne der auf die 3 Koordinatenachsen bezüglichen Teile, aus denen sich die Gesamtarbeit zusammensetzt, den der betreffenden Achse entsprechenden Zuwachs der Energie mißt. Es ist dies abermals nichts anderes als eine Anwendung des Prinzips der Übereinanderlagerung der Energien, welches die Bedeutung hat, eine Reihe von äußerlich verschiedenartigen Sätzen unter einen gemeinsamen Gesichtspunkt zusammenzufassen, und wegen dessen wir nur wieder auf die Bemerkungen S. 146 verweisen können.

Somit haben wir die zwischen zwei Punkten wirkenden Kräfte zurückgeführt auf Zentralkräfte, die ein nur von der Entfernung abhängiges Potenzial U haben, wobei U zuglei

den Wert der potenziellen Energie der beiden Punkte ausdrückt. Bis jetzt ist in der Natur keine einzige Erscheinung entdeckt worden, die der Annahme widerspricht, daß sich sämtliche Kräfte in letzter Linie zurückführen lassen auf solche Zentralkräfte. Hiergegen läßt sich aus der Abhängigkeit der elektrodynamischen Wirkungen von der Stromstärke und sogar von deren Differenzialquotienten nach der Zeit ebenso wenig ein Einwand herleiten, wie etwa aus der Tatsache, daß der Druck eines Gases abhängig ist von der Temperatur, also auch von der lebendigen Kraft der inneren Bewegungen. Denn wie man vor wenigen Jahrzehnten gelernt hat die letztere Kraft durch die Gesetze des elastischen Stoßes zu erklären, welche sich ihrerseits gewiß auf die Wirkungen von Zentralkräften reduzieren lassen, so ist auch gegründete Aussicht vorhanden, die elektrodynamischen Erscheinungen in ähnlicher Weise aufzulösen. Man muß sich nur die elektrodynamischen Kräfte vorstellen nicht als primär bedingt durch das bloße Vorhandensein der strömenden Elektrizität, sondern vielmehr als hervorgehend aus einer eigentümlichen, einstweilen noch unbekannten, Anordnung der wirkenden Zentren, die selber erst eine Folge der Tätigkeit des Stromes ist.

Gehen wir nun weiter zur Betrachtung eines Systems von mehreren Punkten, die in endlichen Entfernungen aufeinander wirken, so denken wir uns die hier auftretenden Kräfte zerlegt in solche, die nur zwischen je zwei bestimmten Punkten wirken und führen dadurch alle Wirkungen auf Zentralkräfte zurück. Daß eine derartige Zerlegung überhaupt möglich ist, insbesondere, daß die zwischen zwei Punkten wirkenden Kräfte in ihrer Größe und Richtung gar nicht beeinflußt werden durch die von anderen Punkten ausgehenden Wirkungen, versteht sich durchaus nicht von selbst, sondern bildet wieder einen Fall der Anwendung des Prinzips der Übereinanderlagerung der Wirkungen, das uns schon zu wiederholten Malen die Handhabe zur Ver-

wertung des Prinzips der Erhaltung der Energie geliefert hat. — Hierdurch erklärt sich auch, weshalb der Satz von der Gleichheit der Wirkung und Gegenwirkung auch für solche Kräfte gilt, welche nicht unmittelbar in der Form von Zentralkräften erscheinen, wie: Reibung, unelastischer Stoß u. dgl. Solche Kräfte sind doch immer als zusammengesetzt anzusehen aus einer Anzahl von Zentralkräften, und da die letzteren einzeln dem genannten Satz genügen, müssen es auch die Resultanten tun.

Haben wir nun ein solches System von frei beweglichen Punkten, auf das keine äußeren Wirkungen ausgeübt werden, dessen Energie also konstant ist, so lassen sich die Komponenten der Resultante aller auf einen Punkt xyz wirkenden Kräfte auf die Form bringen:

$$X = -\frac{\partial U}{\partial x}, \qquad Y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \qquad Z = -\frac{\partial U}{\partial z}.$$

U ist das Potenzial der wirkenden Kräfte, es wird gebildet durch einfache Addition der Potenziale je zweier Punkte aufeinander. Für einen einzelnen Punkt gilt wieder der Satz, daß die Veränderung seiner Energie, d. h. seiner lebendigen Kraft, gleich ist der Arbeit der Kraft, die auf ihn wirkt. Summiert man alle hierdurch entstehenden Gleichungen und bezeichnet mit L die Summe aller lebendigen Kräfte, so ergibt sich hieraus:

$$dL = \Sigma\,(X dx + Y dy + Z dz) = -\,dU$$

$$\text{oder: } L + U = \text{konst.}$$

Die Energie des Systems besteht also immer nur aus den beiden Teilen: der aktuellen oder kinetischen und der potenziellen Energie, von denen die erste durch die Summe der lebendigen Kräfte, die zweite durch das Potenzial der Zentralkräfte gebildet wird. Wenn zu den betrachteten Kräften noch Wirkungen von außen hinzutreten, so ändert sich die letzte Gleichung dahin ab, daß die in einer gewissen Zeit

vor sich gehende Veränderung der Energie, d. h. die von außen auf das System übertragene Energie, gleich ist der Summe der Arbeiten, die in derselben Zeit von den äußeren Kräften an allen Punkten des Systems geleistet werden. Durch diesen Satz ist man in den Stand gesetzt, die Gleichung der Energie auf einen ganz beliebig aus dem System herausgegriffenen Komplex von Punkten anzuwenden.

Für ein System freier Punkte, wie wir es bis jetzt angenommen haben, ist die Aufstellung der Bewegungsgleichungen ebenso einfach wie für einen einzelnen freien Punkt. Etwas anders wird es, wenn die Bewegungen der Punkte durch feste Bedingungen eingeschränkt werden, da in diesem Fall zu den treibenden Kräften noch gewisse Zwangskräfte hinzutreten, deren Größe und Richtung nicht unmittelbar durch die Lage der Punkte gegeben sind. Doch gelangt man hier zum Ziel durch die Benutzung einer für alle Zwangskräfte charakteristischen Eigenschaft. Welche feste, von der Zeit unabhängige, Bedingungen wir nämlich auch in der Natur beobachten mögen (feste Flächen und Linien, starre Körper, vollkommen biegsame und unausdehnbare Fäden und Membrane, inkompressible Flüssigkeiten): für alle gilt der Satz, daß die Gesamtarbeit der von ihnen herrührenden Zwangskräfte stets gleich o ist, und zwar aus dem Grunde, weil die Aufrechterhaltung dieser Bedingungen weder mit Aufwand noch mit Erzeugung von Energie verbunden ist. Denn da weder äußere Arbeitleistung erforderlich ist, um die Wirksamkeit der genannten Verbindungen zu unterhalten, noch auch die Körper, welche die Verbindungen konstituieren, bei beliebigen Bewegungen irgend eine innere Veränderung erleiden, so kann aus den Wirkungen der den Bedingungen entsprechenden Zwangskräfte in ihrer Gesamtheit auch keine Arbeit oder lebendige Kraft hervorgehen; dieselbe wäre sonst aus Nichts entstanden. Sobald allerdings einer der genannten beiden Umstände in Wegfall kommt, hört auch die von uns gemachte Argumen-

tation auf, bindend zu sein. So z. B. wird zur Aufrechterhaltung der festen Bedingungen im allgemeinen immer dann die Arbeit einer äußeren Kraft erfordert, wenn dieselben von der Zeit abhängig sind, wenn also z. B. ein Punkt gezwungen ist, auf einer Fläche zu bleiben, die sich auf bestimmte gegebene Weise bewegt. In diesem Fall wird die Zwangskraft der Fläche von o verschiedene Arbeit an dem Punkte leisten, und zwar genau von dem Betrage der Arbeit, die erforderlich ist, um die Fläche in ihrer Bewegung zu erhalten. Andrerseits haben wir eine innere Veränderung der die feste Bedingung bildenden Körper beispielsweise dann zu verzeichnen, wenn ein Punkt sich auf einer reibenden Fläche bewegt; hier leistet die von der Fläche ausgehende Kraft auch eine Arbeit, aber dafür bleibt die Fläche nicht unverändert, sondern sie wird erwärmt, elektrisiert usw. Wenn wir derartige Fälle, die einer besonderen Behandlung bedürfen, von der Behandlung ausschließen, so können wir allgemein den Satz aufstellen: Die Gesamtarbeit aller Zwangskräfte ist = o. Dabei können natürlich die Zwangskräfte an einzelnen Punkten sehr wohl Arbeit leisten, wie z. B. die Spannung eines ausdehnbaren Fadens, d. h. sie können Energie von einem Punkt zum andern übertragen, ohne deren Gesamtbetrag zu ändern.

Aus diesem Satz folgt also für ein System von Punkten, das beliebigen festen Bedingungen unterworfen ist, und auf das sonst keine äußeren Kräfte wirken, unmittelbar wieder die obige Gleichung der Erhaltung der Energie:

$$L + U = \text{konst.}$$

ganz unabhängig von den festen Bedingungen.

Wenn das System durch die Wirkung der treibenden Kräfte aus dem Ruhezustand in Bewegung versetzt wird, so ist, da dann $dL > 0$, immer $dU < 0$, d. h. die Bewegung geht dann immer in dem Sinne vor sich, daß die potenzielle Energie, also z. B. bei einem schweren Körper die Höhe

des Schwerpunkts, abnimmt. Hieraus resultieren sogleich die Gleichgewichtsbedingungen des Systems. Denn es kann offenbar keine Bewegung eintreten, wenn für alle Verschiebungen δx, δy, δz, die die Punkte vermöge der festen Bedingungen überhaupt erleiden können, $\delta U \geqq 0$, da dann die zum Eintritt einer Bewegung notwendige Bedingung auf keinerlei Weise erfüllbar ist. Sind die festen Bedingungen derart, daß für jede mit den Bedingungen verträgliche Verschiebung auch zugleich die entgegengesetzte zulässig ist (was z. B. nicht der Fall, wenn ein Faden wohl undehnbar, aber nicht unzusammendrückbar ist), so kann die letzte Bedingung nur dadurch erfüllt werden, daß für alle zulässigen Verschiebungen: $\delta U = 0$ oder: $\Sigma (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = 0$. Gleichgewicht ist also in allen Zuständen des Systems vorhanden, für welche U ein Maximum oder ein Minimum ist. Daß der erste Fall dem absolut labilen, der zweite dem absolut stabilen Gleichgewicht entspricht, ist unmittelbar einleuchtend und von uns bereits für einen einzigen Punkt (S. 177) erörtert worden.

Schließlich können wir jeden beliebigen Bewegungszustand nach dem Vorgang von d'Alembert dadurch auf einen Gleichgewichtszustand zurückführen, daß wir zu den Komponenten der treibenden Kraft X, Y, Z an jedem Punkt die Größen $-m\frac{d^2x}{dt^2}$, $-m\frac{d^2y}{dt^2}$, $-m\frac{d^2z}{dt^2}$ beziehungsweise addieren. Wir erhalten dann aus dem obigen Satz der virtuellen Verschiebungen:

$$\sum\left\{\left(X-m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x+\left(Y-m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y+\left(Z-m\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z\right\}=0$$

und können daraus nach bekannten Methoden, die vorzugsweise von Lagrange und von Hamilton entwickelt sind, die Bewegungsgleichungen für jeden einzelnen Punkt in verschiedenen Formen ableiten. Da diese Untersuchungen wesentlich mathematisches Interesse besitzen, so haben wir

hier auf deren Besprechung nicht einzugehen, wollen jedoch vor dem Übergang zu weiteren Aufgaben eine Bemerkung von prinzipieller Wichtigkeit anfügen.

Die Energie eines Systems von Punkten stellt sich uns dar als aus zwei Arten bestehend, von denen die eine, U, das Potenzial der treibenden Kräfte, nur von der Lage, die andere, L, die Summe der lebendigen Kräfte, nur von der Geschwindigkeit der Punkte abhängt. In der von uns gebrauchten Form sind die Werte der beiden Energiearten durch ihre primären Ausdrücke (S. 124) gegeben, dieselben behalten daher durchweg ihre Gültigkeit und ihre Bedeutung, wie verschiedenartig auch die festen Bedingungen angenommen werden mögen. Indessen ist es oft von Vorteil, mit Benutzung der gegebenen Bedingungen statt der rechtwinkligen Koordinaten der Punkte andere Variabeln zur Bestimmung der Zustände des Systems zu verwenden, namentlich solche, die voneinander unabhängig sind, was ja bei den Koordinaten im allgemeinen nicht der Fall sein wird. Haben wir z. B. n Punkte, also $3n$ Koordinaten, und m feste Bedingungen, so wird man oft bequemer die Bewegungen des Systems auf $(3n - m)$ voneinander unabhängige Variabeln zurückführen, zumal es meistens gerade die unabhängigen Variabeln sind, die der Naturbeobachtung am unmittelbarsten zugänglich erscheinen. Infolge dieser Transformation verlieren dann die Ausdrücke der Energiearten ihre primäre Form und nehmen zum Teil andere Eigenschaften an. Nennen wir die unabhängigen Variabeln etwa $p_1, p_2, \ldots$ und nehmen an, daß durch die Werte aller p diejenigen aller xyz bestimmt sind, so lassen sich die rechtwinkligen Koordinaten alle durch die p, die Geschwindigkeiten aber durch die p und $\frac{dp}{dt}$ zugleich ausdrücken. Durch Substitution erhält man dann die Werte von U und L durch die neuen Variabeln dargestellt. Aber während die potenzielle Energie immer noch als eine Funktion der Variabeln selber er-

scheint, ändert die kinetische Energie ihren Charakter. Zwar bleibt sie eine ganze quadratische homogene Funktion der Differenzialquotienten der Variabeln nach der Zeit, jedoch enthält sie im allgemeinen nicht mehr nur die reinen Quadrate, sondern auch die Produkte je zweier solcher Differenzialquotienten, und außerdem sind die Koeffizienten dieser Funktion nicht mehr Konstante, sondern abhängig von den Variabeln p. In dieser Form hört also die kinetische Energie auf, von der Lage der Punkte des Systems unabhängig zu sein, — ein Umstand, der für die Anwendung der mechanischen Prinzipien auf Wärme und Elektrizität von fundamentaler Bedeutung ist, wie sich z. B. zeigt an dem von Maxwell aus den allgemeinen mechanischen Gleichungen abgeleiteten Ausdruck der kinetischen Energie eines Systems von galvanischen Strömen, die ja eine ganze quadratische homogene Funktion der Geschwindigkeiten der Leiter und der Stromintensitäten ist, während ihre Koeffizienten von der Lage der Leiter abhängen.

Die von uns im bisherigen über die mechanische Energie gemachten Erörterungen finden nur auf den Fall unmittelbare Anwendung, daß die Anzahl der Variabeln, von denen der Zustand des materiellen Systems abhängt, eine endliche ist; sie bedürfen aber der Ergänzung, sobald sich jene Anzahl ins Unendliche steigert, sobald also z. B. die betrachteten Punkte einem stetig ausgedehnten Körper angehören, wie das ja bei den meisten Anwendungen zutrifft. Man könnte nun die oben gewonnenen Resultate vermittelst eines geeigneten Grenzüberganges auch direkt auf den bezeichneten Fall übertragen, indes ist es weit einfacher, und für die Anwendung des Energieprinzips interessanter, die hier auftretenden Fragen einer besonderen Behandlung zu unterwerfen. Wir wollen uns also jetzt zunächst mit einem als stetig vorausgesetzten Körper beschäftigen, einerlei, ob derselbe sich im festen, flüssigen oder gasförmigen Aggregatzustand befindet.

Betrachten wir zuerst ein Element des Körpers, und stellen für dasselbe die Gleichung auf, welche das Prinzip der Energie ausspricht. Die einer bestimmten Zustandsänderung des Elements entsprechende Änderung seiner Energie ist gleich dem Betrage der mechanischen Arbeit oder einer ihr äquivalenten Wirkung, die außerhalb des Elements aufgewendet werden muß, um die Zustandsänderung auf irgend eine Weise hervorzubringen. (S. 165.) Um diese Gleichung auf die Veränderung anzuwenden, welche das Element im Laufe einer beliebigen Bewegung des Körpers während des Zeitteilchens dt erleidet, fassen wir zunächst die äußeren Wirkungen ins Auge, die geeignet sind, die betreffende Zustandsänderung herbeizuführen. Diese lassen sich in verschiedene Arten zerlegen, deren Einflüsse sich einfach superponieren. Einmal haben wir die Arbeit der Kräfte zu berücksichtigen, die von außen auf die ganze Masse des Elements wirken, nach Art der Schwere, und deren Größe wir als proportional der Masse und als von vorneherein bekannt voraussetzen wollen. Bezeichnet also $\partial\tau$ das Volumen, μ die Dichte des Elements, so haben wir für die Arbeit dieser Kräfte einen Ausdruck von der Form:

$$(1) \qquad (X dx + Y dy + Z dz) \cdot \mu \cdot \partial\tau.$$

XYZ sind dabei die Komponenten der auf die Masseneinheit wirkenden Kraft, dx, dy, dz die Komponenten der Verschiebung, die der materielle Punkt, dessen Koordinaten zurzeit t x, y, z sind, im Zeitelement dt erleidet. Wir haben hier der besseren Unterscheidung wegen von einer Bezeichnung der Differenzialgrößen Gebrauch gemacht, die wir auch im folgenden überall durchführen werden, indem wir nämlich das Zeichen d für ein Differenzial benutzen, in welchem als unabhängige Variabeln vorausgesetzt sind die Zeit t und irgend 3 Größen, die einen bestimmten materiellen Punkt charakterisieren, während dagegen sich das Zeichen ∂ auf ein Differenzial beziehen soll, das genommen

ist in bezug auf die Zeit t und die 3 Raumkoordinaten (hier x, y, z) als unabhängige Variabeln. So z. B. entspricht der Differenzialquotient $\frac{d\mu}{dt}$ der zeitlichen Änderung, die die Dichte in einem bestimmten sich bewegenden materiellen Punkt erleidet, der Differenzialquotient $\frac{\partial \mu}{\partial t}$ der zeitlichen Änderung, die die Dichte an einer bestimmten Stelle im Raum erleidet. Beide Größen hängen zusammen durch die Gleichung:

$$\frac{d\mu}{dt} = \frac{\partial \mu}{\partial t} + \frac{\partial \mu}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial \mu}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial \mu}{\partial z}\frac{dz}{dt}.$$

Die Arbeit der auf die Masse des Elements aus der Ferne wirkenden Kräfte genügt aber im allgemeinen nicht, um die Zustandsänderung des Elements hervorzubringen, sie kann z. B. nie eine Drehung desselben veranlassen; dagegen können wir die in Rede stehende Veränderung, wenigstens was den mechanischen Zustand betrifft, stets dadurch herbeiführen, daß wir uns gewisse Kräfte angebracht denken, die von allen Seiten auf die Oberfläche des Elements wirken. Die Größe der von ihnen geleisteten Arbeit ist leicht zu berechnen. Denken wir uns das Volumen des Elements zur Zeit t als ein rechtwinkliges Parallelepiped, dessen, mit den Koordinatenachsen parallele, Kanten die Längen ∂x, ∂y, ∂z haben, so wird der ganze Betrag der in der Umgebung des Elements durch die Wirkung dieser Druckkräfte aufgewendeten Arbeit erhalten, wenn man die einzelnen Arbeiten an den 6 Seitenflächen des Parallelepipeds addiert. Dabei wird die an einer Seitenfläche geleistete Arbeit proportional sein der Größe dieser Fläche, so daß wir z. B. für die Seitenfläche, welche durch den Punkt x, y, z geht und der YZ-Ebene parallel ist, den Arbeitswert haben:

$$(X_x dx + Y_x dy + Z_x dz) \cdot \partial y\, \partial z.$$

X_x Y_x Z_x bezeichnen die Komponenten der von außen auf

die Flächeneinheit derjenigen Fläche wirkenden Kraft, deren innere Normale durch die vom Index x bezeichnete Richtung dargestellt ist. In diesem Sinne wird z. B. in einem Gase der Druck X_x stets positiv, in einem in der Richtung der X Achse gespannten Draht dagegen negativ.

An der gegenüberliegenden Seitenfläche, die durch den Punkt $x + \partial x$, y, z geht, wird aber in derselben Zeit eine Arbeit geleistet, die der obigen an Vorzeichen entgegengesetzt ist und sich an Größe von ihr nur dadurch unterscheidet, daß x in $x + \partial x$ übergegangen ist, während y und z konstant bleiben, so daß wir als Betrag der ganzen Arbeit an dem betrachteten Flächenpaar verzeichnen können:

$$-\frac{\partial}{\partial x}(X_x dx + Y_x dy + Z_x dz) \cdot \partial x\, \partial y\, \partial z.$$

(2) Hierzu kommen noch die Arbeiten an den beiden anderen Paaren von Seitenflächen:

$$-\frac{\partial}{\partial y}(X_y dx + Y_y dy + Z_y dz) \cdot \partial\tau$$

$$-\frac{\partial}{\partial z}(X_z dx + Y_z dy + Z_z dz) \cdot \partial\tau.$$

Die Summe der drei letzten Ausdrücke zusammen mit dem Ausdruck (1) stellt somit die gesamte mechanische Arbeit dar, welche während der Zeit dt außerhalb des Elementes aufgewendet wird und daher zur Vergrößerung der Energie desselben beiträgt.

Die Erfahrung zeigt allerdings, daß im allgemeinen diese mechanische Arbeit nicht die einzige Wirkung darstellt, welche in der Umgebung des Elementes stattfindet, daß vielmehr noch andere Wirkungen hinzukommen, die nicht etwa erst auf Kosten der eben berechneten Arbeit entstehen und also schon in ihr einbegriffen sind, wie z. B. die Kompressionswärme, sondern die gleichzeitig neben dieser Arbeit in der Umgebung auftreten. Dahin gehören einmal die durch Temperaturdifferenzen hervorgerufenen Er-

scheinungen der Wärmeleitung und Strahlung, von denen wir aber hier ganz absehen können, da sie sich unabhängig neben die mechanischen Wirkungen lagern, ferner die durch Geschwindigkeitsdifferenzen bedingten Vorgänge der Reibung und des Stoßes, durch welche Energie nicht nur in der Form äußerer mechanischer Arbeit, sondern auch in der Form der Molekulararbeit und Wärme unmittelbar übertragen wird.

Wenn wir indessen diese Erscheinungen vorläufig gänzlich außer acht lassen, also die Untersuchung beschränken auf vollkommen elastische Körper, so dürfen wir jedenfalls den oben gewonnenen Ausdruck der mechanischen Arbeit als den Gesamtaufwand der Wirkungen betrachten, die außerhalb des Elements in der Zeit dt stattgefunden haben. Dieselbe mißt die gleichzeitige Änderung der Energie, zu deren Berechnung wir nun übergehen. Die Gesamtenergie des Elements besteht aus zwei Teilen: der äußeren, kinetischen, und der inneren, potenziellen Energie. Die erstere hat den Wert:

$$\frac{\mu \cdot \partial\tau}{2}\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right\},$$

die letztere hängt nur von dem inneren Zustand des Elements ab, der außer durch die Lagerung der kleinsten Teilchen noch durch die Temperatur des Elementes bedingt ist. Die Temperatur ist aber ihrerseits bei vollkommen elastischen Körpern, in denen keine Wärmeleitung stattfindet, einzig und allein abhängig von der mechanischen Veränderung (Deformation) des Elements, da hierdurch überhaupt die gesamte Zustandsänderung, einschließlich der äußeren Wirkungen, bestimmt ist. Wir können daher die innere Energie des Elements ansehen als eine Funktion allein derjenigen Größen, welche die augenblickliche Deformation desselben bestimmen, und deren es bekanntlich, bei endlichen wie bei unendlich kleinen Veränderungen, immer 6 gibt. Denn jede Veränderung eines Elementes kann als lineäre Ver-

änderung angesehen werden[1]) und ist also durch 12 Koeffizienten gegeben; von diesen entsprechen aber 6 einer Translation und einer Rotation des Elements, haben also keinen Einfluß auf die Deformation (Dilatation nach 3 aufeinander senkrechten Richtungen), für deren Bestimmung die 6 anderen übrig bleiben. Dabei kann man die Verschiebungen von einem ganz nach Willkür gewählten Nullzustand aus rechnen, bei festen Körpern am bequemsten vom natürlichen Zustand, bei Gasen von einem beliebigen Zustand gleichmäßigen Druckes aus. Setzen wir außerdem die innere Energie proportional der Masse, so ergibt sich für sie ein Ausdruck von der Form: $U \cdot \mu \cdot \partial\tau$. Selbstverständlich ist U hier nicht der primäre (S. 124) Ausdruck der inneren Energie der Masseneinheit, sondern nur gültig für den behandelten Fall, er bezieht sich aber natürlich nicht etwa auf Prozesse, die bei konstanter Temperatur vor sich gehen, sondern auf Vorgänge, die in der Wärmelehre als adiabatisch bezeichnet werden. Die nähere Bestimmung der Form der Funktion U verschieben wir noch ein wenig, um nicht schon hier die Unterscheidung zwischen unendlich kleinen und endlichen Bewegungen einführen zu müssen.

Das Wachstum der Energie des Elements in der Zeit dt ist demnach:

$$d\left[\frac{\mu\partial\tau}{2}\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right\}\right]+d\left[\mu\partial\tau\cdot U\right]$$

und, da die zeitliche Änderung $d(\mu\cdot\partial\tau)=0$:

$$\mu\cdot\partial\tau\left(\frac{d^2x}{dt^2}\,dx+\frac{d^2y}{dt^2}\,dy+\frac{d^2z}{dt^2}\,dz\right)+\mu\partial\tau\cdot dU.$$

Diese Größe den summierten Ausdrücken (1) und (2) gleichgesetzt ergibt die Gleichung des Prinzips der Erhaltung

1) G. Kirchhoff: Mechanik, 1877, p. 107.

der Energie für das Element eines vollkommen elastischen Körpers.

Weitere Schlüsse gestattet das Prinzip selber nicht zu ziehen; nichtsdestoweniger können wir uns unter Benutzung des Prinzips der Übereinanderlagerung der Wirkungen durch Zerlegung der angeführten Gleichung nach gewissen einfachen unmittelbar einleuchtenden Voraussetzungen gerade so viel Gleichungen verschaffen, als zur Bestimmung der Bewegung erforderlich sind. Zunächst ist an der Form des Ausdrucks (2) ersichtlich, daß der Wert der außerhalb des Elements aufgewendeten Arbeit bedingt ist durch zwei verschiedene Umstände, nämlich durch die Art der räumlichen Veränderlichkeit 1) der Druckkomponenten X_x, Y_x, . . 2) der Geschwindigkeitskomponenten $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$; sind beiderlei Größen im ganzen Raum konstant, so verschwindet die ganze Arbeit. Nun wollen wir die Annahme machen, daß jeder dieser beiden Umstände auch in besonderer Weise auf die Änderung der Energie hinwirkt: die Veränderlichkeit des Druckes im Raume soll nämlich lediglich den Wert der kinetischen Energie, die Veränderlichkeit der Geschwindigkeit lediglich den Wert der potenziellen Energie beeinflussen; eine Veränderung der lebendigen Kraft kann also nur dann zustande kommen, wenn der Druck im Raume ungleichmäßig verteilt ist, und eine Deformation kann nur dann eintreten, wenn die Geschwindigkeit von Ort zu Ort variiert, — Folgerungen, deren Berechtigung in die Augen fällt. Ebenso versteht es sich, daß die Arbeit, welche von den auf die ganze Masse des Elements aus der Ferne wirkenden Kräften aufgewendet wird, nur der kinetischen Energie zugute kommt.

Zerlegen wir also nun die Gleichung der Energie in die auf die beiden verschiedenen Energiearten bezüglichen Teile, so erhalten wir unter Weglassung des Faktors $\partial\tau$ einmal für die kinetische Energie:

$$
\begin{aligned}
(3)\qquad \mu\left(\frac{d^2x}{dt^2}dx+\frac{d^2y}{dt^2}dy+\frac{d^2z}{dt^2}dz\right)&\\
&=(Xdx+Ydy+Zdz)\cdot\mu\\
&-\left(\frac{\partial X_x}{\partial x}dx+\frac{\partial Y_x}{\partial x}dy+\frac{\partial Z_x}{\partial x}dz\right)\\
&-\left(\frac{\partial X_y}{\partial y}dx+\frac{\partial Y_y}{\partial y}dy+\frac{\partial Z_y}{\partial y}dz\right)\\
&-\left(\frac{\partial X_z}{\partial z}dx+\frac{\partial Y_z}{\partial z}dy+\frac{\partial Z_z}{\partial z}dz\right)
\end{aligned}
$$

und hieraus unter weiterer Zerlegung nach den 3 Koordinatenachsen, indem wir die Koeffizienten von dx, dy, dz auf beiden Seiten einander gleich setzen, die bekannten Poissonschen Gleichungen:

$$
(4)\qquad \begin{cases}
\mu\dfrac{d^2x}{dt^2}=\mu X-\dfrac{\partial X_x}{\partial x}-\dfrac{\partial X_y}{\partial y}-\dfrac{\partial X_z}{\partial z},\\
\mu\dfrac{d^2y}{dt^2}=\mu Y-\dfrac{\partial Y_x}{\partial x}-\dfrac{\partial Y_y}{\partial y}-\dfrac{\partial Y_z}{\partial z},\\
\mu\dfrac{d^2z}{dt^2}=\mu Z-\dfrac{\partial Z_x}{\partial x}-\dfrac{\partial Z_y}{\partial y}-\dfrac{\partial Z_z}{\partial z}.
\end{cases}
$$

Andererseits bleibt für die innere Energie die Gleichung:

$$
\begin{aligned}
\mu\cdot dU=&-\left(X_x\cdot\frac{\partial dx}{\partial x}+Y_x\cdot\frac{\partial dy}{\partial x}+Z_x\cdot\frac{\partial dz}{\partial x}\right)\\
(4a)\qquad &-\left(X_y\cdot\frac{\partial dx}{\partial y}+Y_y\cdot\frac{\partial dy}{\partial y}+Z_y\cdot\frac{\partial dz}{\partial y}\right)\\
&-\left(X_z\cdot\frac{\partial dx}{\partial z}+Y_z\cdot\frac{\partial dy}{\partial z}+Z_z\cdot\frac{\partial dz}{\partial z}\right).
\end{aligned}
$$

U, die innere Energie der Masseneinheit, ist nach den obigen Ausführungen eine Funktion der 6 Größen, welche die Deformation des Elements bestimmen, insbesondere ist U unabhängig von der Drehung, die das Element als Ganzes erlitten hat. Nun stellen bekanntlich die Ausdrücke:

$$
\frac{\partial dz}{\partial y}-\frac{\partial dy}{\partial z},\qquad \frac{\partial dx}{\partial z}-\frac{\partial dz}{\partial x},\qquad \frac{\partial dy}{\partial x}-\frac{\partial dx}{\partial y}
$$

die doppelten Komponenten der unendlich kleinen Drehung vor, welche das Element in der Zeit dt erleidet, folglich kann dU nicht von diesen Differenzen, sondern nur von den entsprechenden Summen abhängen, woraus sogleich folgt:

$$(5)\quad \begin{cases} Z_y = Y_z, \quad X_z = Z_x, \quad Y_x = X_y, \text{ und:} \\ -\mu \cdot dU = X_x \dfrac{\partial dx}{\partial x} + Y_y \cdot \dfrac{\partial dy}{\partial y} + Z_z \cdot \dfrac{\partial dz}{\partial z} \\ \qquad + Z_y \cdot \left(\dfrac{\partial dz}{\partial y} + \dfrac{\partial dy}{\partial z}\right) + X_z \cdot \left(\dfrac{\partial dx}{\partial z} + \dfrac{\partial dz}{\partial x}\right) \\ \qquad + Y_x \cdot \left(\dfrac{\partial dy}{\partial x} + \dfrac{\partial dx}{\partial y}\right). \end{cases}$$

Ebenso wie für ein unendlich kleines Element gelten natürlich diese Betrachtungen für einen beliebigen endlichen Teil des Körpers, da das Wachstum der Energie immer gleich ist der aufgewendeten äußeren Arbeit. Zu dem nämlichen Resultat gelangt man direkt durch Integration der für ein Massenelement geltenden Gleichung der Energie über eine endliche Masse. Ist der ganze Körper sich selbst überlassen, so bleibt seine Gesamtenergie konstant; wenn er dann aus dem Zustand der Ruhe in den der Bewegung übergeht, wobei also die kinetische Energie wächst, so nimmt deshalb die potenzielle Energie ab, woraus ebenso wie S. 177 der Satz folgt, daß dem Minimum der Funktion U der stabile Gleichgewichtszustand entspricht.

Der allgemeine endliche Ausdruck von U ist nur bekannt für vollkommene Gase und inkompressible Flüssigkeiten, wir beschränken uns daher zunächst auf die Betrachtung sehr kleiner Bewegungen, wie sie in festen Körpern, Flüssigkeiten und Gasen stattfinden können. Bei festen Körpern ist diese Beschränkung ohnehin in der Regel geboten durch die Notwendigkeit der Einhaltung der Elastizitätsgrenze.

Der Bequemlichkeit halber führen wir neue Bezeichnungen der Variabeln ein. Wir nennen x, y, z die Koordi-

naten, die ein materieller Punkt in dem Zustand hat, von welchem aus die Verschiebungen gerechnet werden, und u, v, w diese kleinen Verschiebungen selber. Dann wird durch x, y, z ein bestimmter materieller Punkt definiert, der zur Zeit t die Lage $x + u$, $y + v$, $z + w$ einnimmt. In den bisherigen Gleichungen haben wir uns also überall $x + u$, $y + v$, $z + w$ statt x, y, z gesetzt zu denken. Wenn u, v, w in endlichen Intervallen der Variabeln nicht sehr viel Maxima und Minima besitzen, so sind auch die Differenzialquotienten dieser Größen nach Ort und Zeit sehr klein und können, wenn der Körper endlich ausgedehnt ist, gegen die von x, y, z vernachlässigt werden. Wir erhalten dann aus (5), da nun eine Vertauschung der Ordnung der Differenziation zulässig ist:

$$-\mu \cdot dU = X_x \cdot d\frac{\partial u}{\partial x} + Y_y \cdot d\frac{\partial v}{\partial y} + Z_z \cdot d\frac{\partial w}{\partial z} + Z_y \cdot d\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) + X_z \cdot d\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) + Y_x \cdot d\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

Wir setzen zur Abkürzung:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = x_x, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = y_y, \qquad \frac{\partial w}{\partial z} = z_z,$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = z_y = y_z, \qquad \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = x_z = z_x,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = y_x = x_y.$$

Diese 6 Größen bestimmen, unabhängig voneinander, die Deformation des Elements und folglich auch den Wert von U. Durch Vergleichung der beiden Gleichungsseiten ergibt sich dann:

$$X_x = -\mu\frac{\partial U}{\partial x_x}, \quad Y_y = -\mu\frac{\partial U}{\partial y_y}, \quad Z_z = -\mu\frac{\partial U}{\partial z_z},$$

$$Z_y = -\mu\frac{\partial U}{\partial z_y}, \quad X_z = -\mu\frac{\partial U}{\partial x_z}, \quad Y_x = -\mu\frac{\partial U}{\partial y_x}.$$

Es handelt sich noch um den Ausdruck von U. Derselbe läßt sich, da die Variabeln, von denen er abhängt, sehr klein sind, nach Potenzen derselben entwickeln. Bleiben wir bei den quadratischen Gliedern stehen, so werden die Druckkomponenten lineäre Funktionen der Variabeln. Ob U in homogener Form auftritt oder nicht, kommt an auf die Wahl des Nullzustandes ($x_x = 0 = x_y = \ldots$). Zunächst enthält U eine willkürliche additive Konstante, die wir gleich 0 setzen wollen, so daß für den Nullzustand $U = 0$ wird. Machen wir weiter die Annahme, daß der Nullzustand einen Gleichgewichtszustand darstellt, in welchem bei gleichmäßiger Dichte μ_0 überall ein gleichmäßiger, auf jedes Flächenelement senkrecht wirkender Druck p_0 (z. B. Atmosphärendruck) herrscht, so ist für diesen Zustand

$$X_x = Y_y = Z_z = p_0, \qquad Z_y = X_z = Y_x = 0.$$

Dann reduziert sich der lineäre Teil von U auf den Ausdruck: $-\frac{p_0}{\mu_0}(x_x + y_y + z_z)$. Für feste Körper und tropfbare Flüssigkeiten kann p_0 auch gleich 0 angenommen werden.

Der quadratische Teil von U endlich enthält im allgemeinen 21 konstante Koeffizienten, deren Zahl sich jedoch bei der Existenz von Symmetrien in der Struktur des Körpers verringert und für isotrope feste Körper in bekannter Weise auf 2 reduziert, für flüssige und gasförmige dagegen auf 1. Ist nun U bekannt, so ergeben sich daraus unmittelbar die Werte der Druckkomponenten und damit die Bewegungsgleichungen im ganzen Körper. Der Faktor μ, der in den Ausdrücken der Druckkomponenten vor den Differenzialquotienten von U steht, und der in der üblichen Darstellung der Elastizitätslehre gewöhnlich fehlt, kann bei den hier betrachteten kleinen Bewegungen als konstant $= \mu_0$ behandelt werden, bei endlichen Bewegungen (Gleichung (5)) dagegen ist seine Veränderlichkeit zu beachten.

Von besonderer Wichtigkeit werden diese Gleichungen

für die Ableitung der Bewegungsgesetze periodischer Schwingungen, fortschreitender oder stehender Wellen, in elastischen Medien. Die Energie einer jeden derartigen Schwingung besteht aus zwei Teilen, der kinetischen und der potenziellen Energie, deren Summe konstant bleibt, so lange keine äußeren Wirkungen stattfinden. Der Umstand, daß zwei verschiedene Wellen durch geeignete Interferenz sich gegenseitig schwächen und sogar vernichten können, involviert keinen Widerspruch gegen das Prinzip der Erhaltung der Energie. Denkt man sich etwa zwei ebene Wellenzüge von gleicher Schwingungsdauer, gleicher Fortpflanzungsrichtung und gleicher Amplitude mit dem Gangunterschied von einer halben Wellenlänge übereinandergelagert, so wird allerdings die resultierende Welle verschwinden, jedoch ist zu beachten, daß diese Interferenzerscheinung keinen selbständigen Prozeß, sondern nur die eine Seite eines viel umfassenderen Naturvorgangs vorstellt. Die Wellen, welche von zwei verschiedenen Erregern (Schallquellen) ausgehen, können niemals überall mit gleicher Phase zusammentreffen, sondern sie werden sich stets an einigen Orten verstärken, wenn sie sich an anderen schwächen. Die Vorstellung einer ebenen Welle ist überhaupt nur eine Abstraktion; wenn z. B. die beiden angenommenen ebenen Wellen etwa Stücke zweier Kugelwellen sind, die von unendlich entfernten Zentren ausgehen, so wird allerdings in der Endlichkeit der Gangunterschied konstant sein können, aber dafür wird an entsprechenden unendlich entfernten Stellen das Verhältnis ein anderes sein, so zwar, daß im ganzen keine Energie verloren geht, wie das aus unseren Gleichungen folgt.

Um die Energie einer Schallquelle zu messen, reichen die Leistungen unserer spezifischen Sinnesorgane nicht aus; dieselben setzen uns höchstens in den Stand, die Gleichheit oder die graduelle Verschiedenheit der Energien von Wellen gleicher Schwingungsdauer mit größerer oder geringerer Genauigkeit zu beurteilen. Eine absolute Messung

der Energie einer Welle ist nur dadurch möglich, daß man diese Energie in eine andere Arbeitsform verwandelt resp. daraus hervorgehen läßt, in welcher sie einer genaueren Messungsmethode zugänglich ist; dahin gehört vor allem die Verwandlung von Wärme durch Absorption.

Wenden wir uns nun zurück zur Betrachtung endlicher Bewegungen (in flüssigen und gasförmigen Medien), also zu den Gleichungen (4) und (5), mit Wiedereinführung der dortigen Bezeichnungsweise. Die charakteristische Eigenschaft der flüssigen und der gasförmigen Körper ist:

$$\left.\begin{aligned} X_y = Y_z = Z_x = 0, \\ X_x = Y_y = Z_z = p, \end{aligned}\right\}$$

wobei p eine bestimmte von der Natur des Mediums abhängige Funktion von μ.

Somit wird aus (4):

$$\mu \frac{d^2x}{dt^2} = \mu X - \frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\mu \frac{d^2y}{dt^2} = \mu Y - \frac{\partial p}{\partial y}$$

$$\mu \frac{d^2z}{dt^2} = \mu Z - \frac{\partial p}{\partial z},$$

die allgemeinen hydrodynamischen Bewegungsgleichungen, bei deren Benutzung man sich nach Belieben entweder durchweg der Differenzialzeichen ∂ (Eulersche Form) oder der Zeichen d (Lagrangesche Form) bedienen kann.

Ferner erhält man aus (5) für die Bestimmung der inneren Energie der Masseneinheit: U

$$-\mu dU = p \cdot \left(\frac{\partial dx}{\partial x} + \frac{\partial dy}{\partial y} + \frac{\partial dz}{\partial z}\right).$$

Nun ist, wie eine einfache kinematische Überlegung zeigt:

$$d\mu + \mu \cdot \left(\frac{\partial dx}{\partial x} + \frac{\partial dy}{\partial y} + \frac{\partial dz}{\partial z}\right) = 0.$$

Folglich:

$$dU = \frac{p}{\mu^2} \cdot d\mu,$$

$$U = \int \frac{p}{\mu^2} d\mu = -\frac{p}{\mu} + \int \frac{dp}{\mu},$$

oder, wenn man setzt:

$$P = \int \frac{dp}{\mu},$$

$$U = P - \frac{p}{\mu}. \tag{6}$$

Eine additive Konstante bleibt in P und U willkürlich. Hieraus läßt sich die innere Energie der Masseneinheit berechnen, sobald p als Funktion von μ bekannt ist.

Für ein vollkommenes Gas hat man z. B.:

$p = C \cdot \mu^k$ (Wärmeleitung ist ausgeschlossen),

wobei C konstant, k das Verhältnis der beiden spezifischen Wärmen. Daraus folgt:

$$P = \frac{Ck}{k-1} \cdot \mu^{k-1}, \qquad U = \frac{C}{k-1} \cdot \mu^{k-1}.$$

Dieser Wert der inneren Energie ist derselbe wie der aus der Temperatur abgeleitete (vgl. oben S. 127).

Für eine inkompressible Flüssigkeit ist $\mu =$ konst. (also eine feste Bedingung im Sinne von S. 188), folglich $P = \frac{p}{\mu}$ und $U = 0$. In der Tat bleibt ja bei einer inkompressiblen Flüssigkeit der innere Zustand konstant, es kann also auch nicht durch Veränderung desselben Arbeit geleistet werden.

In der Anwendung auf einen endlichen Massenteil der Flüssigkeit erhalten wir ganz ebenso den Satz, daß in irgend einem Zustand die gesamte äußere und innere Energie der Flüssigkeit gleich ist dem Gesamtbetrag der Arbeit, welcher von einem bestimmten Zeitpunkt ab in der Umgebung aufgewendet worden ist, um diesen Zustand hervorzubringen;

diese Arbeit rührt her einmal von den aus der Ferne auf die Masse wirkenden Kräften, und dann von den auf die Oberfläche wirkenden Druckkräften.

Bei der stationären Bewegung ist der Zustand in einem bestimmten Raumpunkt xyz von der Zeit unabhängig, so daß alle nach ∂t genommenen Differenzialquotienten verschwinden. In diesem Falle läßt die Gleichung der Energie, auf ein einzelnes Element bezogen, eine allgemeine Integration nach der Zeit dt zu, welche ergibt:

$$\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right\}+U=\text{konst.}-V-\frac{p}{\mu}$$

d. h. die gesamte, innere und äußere, Energie der Masseneinheit ist gleich der Abnahme der Potenzialfunktion der Massenkräfte: V (die als vorhanden vorausgesetzt wird) und des durch die Dichte dividierten Druckes. Etwas einfacher lautet die Gleichung nach (6):

$$\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right\}+P+V=\text{konst.}$$

Indem wir hiermit die Betrachtung der Bewegungen vollkommen elastischer Körper beschließen, wollen wir unter den komplizierteren Erscheinungen, welche nur durch eine Abweichung von den einfachen S. 195f. gemachten Voraussetzungen erklärt werden können, und die sich zurzeit noch etwas schwieriger der Behandlung durch die von uns eingeschlagene Methode fügen, wenigstens eine herausgreifen, nämlich die Reibungsvorgänge bei der Bewegung einer inkompressiblen Flüssigkeit. Die innere Reibung in einer Flüssigkeit läßt sich mit den Erscheinungen der Reibung und des unelastischen Stoßes fester Körper unter einen Gesichtspunkt bringen. Beide Vorgänge sind bedingt durch das Auftreten einer Kraft, die nur von der relativen Bewegung sich berührender Massen abhängt und deren Wirksamkeit stets auf die Ausgleichung der Geschwindigkeiten

gerichtet ist. Dabei geht immer lebendige Kraft der Molarbewegung verloren, die sich entweder in Molekularbewegung (Wärme) oder in Molekulararbeit umsetzt. Diese Vorstellung genügt, um mit Hilfe unseres Prinzips auf dem schon oben eingeschlagenen Wege die Bewegungsgleichungen einer reibenden Flüssigkeit abzuleiten.

Berechnen wir zunächst wieder den Ausdruck derjenigen Arbeit, die in der Zeit dt außerhalb eines Flüssigkeitselements aufgewendet werden muß, beziehungsweise wirklich aufgewendet wird, um die in derselben Zeit erfolgende Zustandsänderung des Elements hervorzubringen. Dahin gehört zunächst wieder die Arbeit der aus der Ferne auf die Masse des Elements wirkenden Kraft (Schwere), deren Ausdruck oben unter (1) angegeben ist:

$$(7) \qquad (Xdx + Ydy + Zdz) \cdot \mu \partial \tau.$$

Außerdem bleiben uns nur noch die Wirkungen zu betrachten übrig, welche durch den Druck der Flüssigkeit in Verbindung mit den eigentümlichen Kräften, welche die Reibung äußert, durch die Oberfläche des Elementes hindurch in die Umgebung fortgepflanzt werden. Diese Wirkungen sind im allgemeinen, nach Analogie der Reibung und des Stoßes fester Körper, zweierlei Natur. Einmal wird durch sie auf die angrenzenden Teile eine Kraft geäußert in dem Sinne, die Geschwindigkeiten zu verändern (Molarwirkung), zweitens wird durch sie in der Umgebung eine Veränderung der inneren Energie bewirkt (Molekularwirkung), die im allgemeinen mit einer gewissen Deformation verbunden sein kann, in unserem Falle, da die Flüssigkeit als inkompressibel angenommen ist, sich aber lediglich als Temperaturänderung dokumentieren wird. Hiernach haben wir für die äußeren Wirkungen erstens den mechanischen Arbeitsbetrag zu setzen, der genau dieselbe Form hat wie der allgemeine Ausdruck (2):

$$(8)\qquad \begin{cases} -\dfrac{\partial}{\partial x}(X_x dx + Y_x dy + Z_x dz)\cdot \partial\tau \\ -\dfrac{\partial}{\partial y}(X_y dx + Y_y dy + Z_y dz)\cdot \partial\tau \\ -\dfrac{\partial}{\partial z}(X_z dx + Y_z dy + Z_z dz)\cdot \partial\tau. \end{cases}$$

Was nun den zweiten Teil der äußeren Wirkungen betrifft, die Wärmeerzeugung, welche außerhalb des Elementes durch die Arbeit der an der Oberfläche tätigen Reibungskräfte veranlaßt wird, so ist deren Betrag jedenfalls proportional den Seitenflächen des Elements; jedoch ist leicht zu erkennen, daß derselbe gegen die übrigen in Betracht kommenden Wirkungen unendlich klein ausfällt, und zwar aus dem Grunde, weil die an der Grenzschicht erzeugte Wärme gegen diejenige, welche im ganzen Innern des Elements produziert wird, jedenfalls verschwindet. Es liegt hierin ein wesentlicher Unterschied gegenüber den Erscheinungen, welche die Reibung fester Körper begleiten, da bei letzteren nur an einer einzigen Reibungsfläche Molekulararbeit entwickelt wird, die infolgedessen einen Wert von gleicher Größenordnung besitzt wie die durch die Reibung übertragene Molararbeit.

Somit hätten wir für die äußeren Wirkungen einen Ausdruck von genau derselben Form gefunden, wie bei der Bewegung elastischer Körper. Anders wird es aber mit der Energie des Elements: dieselbe besteht einmal aus der lebendigen Kraft, deren Zuwachs in dem Zeitelement dt gegeben ist durch:

$$(9)\qquad \left(\frac{d^2x}{dt^2}dx + \frac{d^2y}{dt^2}dy + \frac{d^2z}{dt^2}dz\right)\cdot \mu\partial\tau,$$

und außerdem, da die Flüssigkeit inkompressibel ist, nur noch aus der durch die innere Reibung erzeugten Wärme. Die in der Zeit dt erfolgende Erwärmung wird im allgemeinen von dem Geschwindigkeitszustand des Elements ab-

hängen, doch nicht von den Geschwindigkeitskomponenten $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ (kürzer: u, v, w) selber — denn bei gleichförmiger Geschwindigkeit findet überhaupt keine Reibung statt — sondern von ihren örtlichen Änderungen, also von den 9 Differenzialquotienten der Größen u, v, w nach den Koordinaten x, y, z. Da aber die Größen:

$$\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \qquad \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y},$$

nur eine Drehung des Elements als Ganzem, keine Deformation bezeichnen, so wird die Erwärmung auch nur von den 6 Größen

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, \qquad \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

abhängen. Sind dieselben hinreichend klein, so können wir bei der Entwicklung des Ausdrucks der Erwärmung nach Potenzen der Variabeln bei der zweiten stehen bleiben. Das absolute Glied ist gleich 0; denn wenn die Variabeln = 0 sind, verschwindet die Reibung und somit die Erwärmung; da ferner die letztere wesentlich positiv ist, so fallen auch die linearen Glieder fort. Im übrigen muß die Form des Ausdrucks, d. h. die Größe der Koeffizienten, unabhängig sein von der Wahl des Koordinatensystems. Diese Bedingung führt ganz ebenso wie bei der Bestimmung der inneren Energie des Elements eines isotropen elastischen festen Körpers (S. 202) auf einen Ausdruck, der nur von zwei Koeffizienten abhängt. Fügt man schließlich noch hinzu die Bedingung der Inkompressibilität:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

so reduziert sich die Größe der durch die Reibung verursachten Erwärmung des Flüssigkeitselements in der Zeit dt auf den mechanisch gemessenen Wert:

ineinander verwandeln, sondern jede verändert sich unabhängig von den andern nur infolge der ihr gerade entsprechenden äußeren Arbeit. Ähnlich verhält es sich mit der Zerlegung der Energie eines Elementes in die äußere (Molarenergie) und innere (Molekularenergie). Wie die Einteilung der Energie aber jedesmal vorzunehmen ist, muß in jedem besonderen Falle die Erfahrung lehren. Dies Prinzip der Superposition spielt in der ganzen Physik, wie wir schon wiederholt betont haben, eine höchst bedeutende Rolle, ohne dasselbe würden alle Erscheinungen sich miteinander vermengen und es ließe sich eine Abhängigkeit der einzelnen voneinander nicht mehr konstatieren; denn wenn jede Wirkung die andere stört, hört natürlich die Möglichkeit auf, den kausalen Zusammenhang zu erkennen. Über dies Prinzip kommen wir deshalb nie hinweg, wir mögen es ausdrücklich betonen oder stillschweigend benutzen, dasselbe liegt im Trägheitsgesetz ebensogut enthalten, wie im Satz des Parallelogramms der Kräfte und dem der Wirkung und Gegenwirkung.

Was aber der hier eingeschlagenen Methode einen wesentlichen Vorzug verleiht, ist einerseits die klare Übersichtlichkeit, mit welcher der Zusammenhang der abgeleiteten Sätze und die Art ihrer Abhängigkeit von dem Prinzip der Erhaltung der Energie hervortritt: wieviel davon als notwendige Folge des Prinzips selber, und wieviel als durch besondere, davon unabhängige Erfahrung festgestellt anzusehen ist; andrerseits aber ist der Umstand von entscheidender Wichtigkeit, daß sich auf dem eingeschlagenen Wege alle Teile der Physik vollständig gleichmäßig und einheitlich behandeln lassen. Die Energie ist ein Begriff, der sein Maß und seine Bedeutung in jeder Naturerscheinung findet, und das Prinzip der Superposition beherrscht ebenfalls alle Naturwirkungen; wir können daher sicher sein, daß, im Falle irgend ein noch unbekanntes Agens entdeckt werden sollte, das Prinzip der Übereinanderlagerung der Wirkungen zwar

nicht dazu dienen könnte, die Gesetze der neuen Kraft aus dem Energieprinzip zu deduzieren, wohl aber uns zur Stellung derjenigen Fragen verhelfen würde, deren Beantwortung durch die Erfahrung das einzige Mittel gewährt, um die Gesetze der Erscheinungswelt aufzudecken.

2. Thermische und chemische Energie.

Den unmittelbarsten und gewaltigsten Einfluß hat die Entdeckung des Energieprinzips auf die Gestaltung der Wärmelehre gehabt, weshalb man sogar heutzutage noch manchmal geneigt ist, diesen Teil der Physik als das eigentliche Feld der Anwendung des Prinzips zu betrachten, obwohl dazu außer den erwähnten historischen Tatsachen durchaus kein spezieller Grund vorliegt. Ja, man kann sagen, daß die Wärmetheorie ihre Ausbildung und die Erfolge, die sie in der neueren Zeit erzielt hat, nicht einmal hauptsächlich der Entdeckung des Energieprinzips verdankt, wenn auch von diesem der erste Anstoß zur Umgestaltung ausging, sondern in ganz demselben Maße und vielleicht noch mehr einmal der Anwendung des von diesem ganz unabhängigen Carnotschen Prinzips, welches Clausius als zweiten Hauptsatz in die Wärmetheorie einführte, und außerdem der von Joule, Krönig und Clausius begründeten mechanischen Auffassung der Wärme, die ebenfalls von dem Energieprinzip vollständig unabhängig ist. Durch die letztere bisher sehr gut bewährte Annahme ist die Wärmetheorie zu einem Teil der Mechanik gemacht worden, und die thermische Energie leitet daher auf die mechanische zurück, die wir soeben behandelt haben. Deshalb soll es hier unsere Aufgabe sein, die Folgerungen des Energieprinzips nur unter Benützung der nächstliegenden Erfahrungstatsachen zu entwickeln, ganz unabhängig von der mechanischen Auffassung der Wärme, also von jeglicher Hypothese über die Molekularstruktur der Körper, und ebenso auch von dem

Carnotschen Prinzip. Immerhin ist das Feld, welches sich unter diesen beschränkenden Voraussetzungen der Anwendung darbietet, noch ein weites zu nennen.

Wir benutzen im folgenden wieder den Satz, daß die Zunahme der Energie eines materiellen Systems gleich ist der entsprechenden außerhalb des Systems aufgewendeten Arbeit oder deren Äquivalent. Die äußeren Wirkungen können sowohl in mechanischen als auch in thermischen Veränderungen bestehen, und für den letzten Fall haben wir das mechanische Äquivalent einer solchen Veränderung zuvörderst durch eine besondere Betrachtung festzustellen. Nach Seite 105 ff. ist der Arbeitswert irgend einer Veränderung gleich dem Betrage der mechanischen Arbeit, welche diese Veränderung entweder hervorbringt, oder welche durch sie hervorgebracht wird, gleichgültig auf welchem Wege dies geschieht. Nun können wir Wärme zwar nicht ohne weitere Nebenänderungen (wozu auch Volumenvergrößerung gehört) in Arbeit verwandeln, wohl aber umgekehrt Arbeit vollständig in Wärme, und die Versuche haben gezeigt, daß eine Erwärmung stets hervorgebracht werden kann durch Aufwand einer Arbeit, deren Betrag zu der Menge der erzeugten Wärme in einem konstanten Verhältnis steht, unabhängig von Materialien, Temperatur usw.; jede Wärmemenge (präziser: jede Erwärmung) ist also einer bestimmten Arbeitsmenge äquivalent. Diese Tatsache konnte nur durch Erfahrung festgestellt werden, und erst auf Grund dieser besonderen Erfahrung wird eine Anwendung des Prinzips der Erhaltung der Energie auf thermische Prozesse möglich. Die Äquivalenz von Wärme und Arbeit läßt sich keineswegs aus dem Energieprinzip deduzieren, letzteres ließe auch noch für ganz andere Auffassungen Raum, wie z. B. die Carnotsche, nach welcher mechanische Arbeit nicht einer Wärmemenge, sondern dem Produkt aus Wärmemenge und Temperatur äquivalent wäre. (Vgl. S. 15 f.) Die Zahl, welche das Verhältnis einer Wärmemenge zu der ihr äqui-

valenten Arbeit angibt, wurde bekanntlich (S. 60) von Joule im metrischen System und bezogen auf Cels. Grade des Quecksilberthermometers zu 423,55 g festgesetzt; um daraus das mechanische Wärmeäquivalent im absoluten C. G. S. Maßsystem zu erhalten, hat man diese Zahl zunächst mit 1,007, zur Reduktion auf das Gasthermometer, ferner mit 100, zur Reduktion auf cm, endlich mit 981, der Beschleunigung der Schwere, zu multiplizieren. Dann ergibt sich die Zahl $4{,}19 \cdot 10^7$, welche auch heute noch als der zuverlässigste Wert des mechanischen Wärmeäquivalents im absoluten C. G. S. System betrachtet werden kann. Von den zahlreichen, auf den verschiedensten Wegen ausgeführten Messungen dieser Konstanten erwähnen wir noch außer den im ersten Abschnitt S. 93f. bereits genannten die von Rowland, die von Griffiths und die von Callendar und Barnes.[1])

Wenn man als Wärmeeinheit diejenige Wärme festsetzt, welche der Arbeit 1 äquivalent ist, so wird das mechanische Wärmeäquivalent $= 1$, und die Ausdrücke vereinfachen sich entsprechend; von diesem Maßsystem werden wir im folgenden Gebrauch machen.

Nachdem wir nun in den Stand gesetzt sind, den Arbeitswert der äußeren Wirkungen zu messen, welche einer bestimmten Zustandsänderung des betrachteten materiellen Systems entsprechen, können wir daraus die dadurch bedingte Änderung der Energie des Systems berechnen. Doch wird hier ebenso wieder wie oben bei der Untersuchung der elastischen Kräfte auf Grund des Superpositionsprinzips eine Auflösung der Energiegleichung in 2 Einzelgleichungen und dadurch eine Vereinfachung der Aufgabe ermöglicht. Einmal zerfällt nämlich die Energie des materiellen Systems in 2 Teile: die molare Energie (lebendige Kraft der Massen-

1) Vgl. die Zusammenstellung von Scheel in den Physikalisch-chemischen Tabellen von Landolt-Börnstein, 3. Aufl. Berlin, J. Springer, 1905, p. 810.

bewegung, Potenzial der Schwere usw.) und die molekulare Energie (Wärme, chemische Energie); andrerseits kann man auch die äußeren Wirkungen immer in 2 Teile zerlegen, deren einer alle diejenigen Wirkungen umfaßt, welche auf die molare Energie Einfluß haben, der andere diejenigen, welche die molekulare Energie verändern. Indem man nun die Änderungen der beiden Energiearten einzeln den auf sie bezüglichen äußeren Wirkungen gleich setzt, erhält man 2 Gleichungen, von denen nur die eine hier von speziellerem Interesse ist, da die andere der Mechanik, also dem vorigen Abschnitt, angehört. Daß diese Scheidung sich in der Regel mit größerer oder geringerer Leichtigkeit wirklich vollziehen läßt, ist deshalb einleuchtend, weil die molare Energie schon von vorneherein bekannt ist; man hat nur den ganzen Prozeß sich zerlegt zu denken in einen auf Molarbewegung und einen auf Molekularbewegung bezüglichen Teil. So wirkt die durch Leitung oder Strahlung von außen zugeleitete Wärme direkt nur auf die molekulare Energie, während die mechanischen äußeren Wirkungen, wie Druck, Stoß, Reibung, im allgemeinen sowohl molare als auch molekulare Veränderungen hervorrufen.[1])

Wir wollen uns daher fortan die Aufgabe vereinfachen durch Untersuchung lediglich solcher Zustände eines endlichen oder unendlich kleinen Körpersystems, in denen die molare Energie gar nicht in Betracht kommt. Bezeichnen wir dann die molekulare Energie mit U, ferner die während einer beliebigen, endlichen oder unendlich kleinen, Zustandsänderung in der Umgebung verschwundene, durch Leitung oder Strahlung in das System übergegangene Wärme mit Q, endlich die dabei in der Umgebung aufgewendete mechanische Arbeit mit A, so ist der Arbeitswert der aufgewendeten äußeren Wirkungen $Q + A$, mithin:

1) [Anm. 1908. Man vergleiche jedoch die oben S. 145 angedeuteten Grenzen für die Trennbarkeit der molaren von der molekularen Energie.]

$$U' - U = Q + A \tag{1}$$

wobei U und U' die Werte der Energie des Systems im Anfangszustand und im Endzustand des betrachteten Prozesses bezeichnen. Die Art des Überganges ist gleichgültig. Geht man näher auf die mechanische Natur der Wärme ein, so bietet sich eine Scheidung von U dar: in aktuelle Energie (freie Wärme) und potenzielle Energie (innere Arbeit, chemische Energie); da indes die beiden Energiearten nicht an spezielle äußere Wirkungen geknüpft sind, werden wir im folgenden von dieser Scheidung keinen Gebrauch machen.

Je nach der Beschaffenheit der Zustandsänderung kann man aus der obigen Gleichung verschiedene Sätze über das thermische oder chemische Verhalten des Systems ableiten. Setzen wir zunächst einen Körper voraus, dessen Zustand durch eine einzige Variable bestimmt ist, so läßt sich U jedenfalls als Funktion dieser einen Variabeln auffassen. Im allgemeinen wird die Wahl der unabhängigen Variabeln beliebig sein; daher kann U in verschiedenen Formen auftreten, die jedoch alle einen und denselben Wert darstellen. Haben wir z. B. eine Flüssigkeit oder ein Gas, das bei konstantem Volumen durch Wärmezufuhr von außen unendlich wenig erwärmt wird, so ist $Q = c_v \cdot dT$, $A = 0$, wobei c_v die Wärmekapazität bei konstantem Volumen, T die absolute Temperatur, nach dem Luftthermometer gemessen, bedeutet. (Die exakte Definition der Temperatur ist allerdings nur mit Hilfe des Carnotschen Prinzips möglich, indes stimmt dieselbe erfahrungsgemäß innerhalb ziemlich weiter Grenzen mit der durch die Ausdehnung der Luft gewonnenen überein.) Es folgt aus Gleichung (1):

$$dU = c_v \cdot dT.$$

Führen wir nun unter Beibehaltung der angenommenen Bedingungen einen endlichen Prozeß aus, so können wir T als einzige unabhängige Veränderliche ansehen und erhalten: $U = \int c_v \cdot dT$, wobei c_v natürlich nur von T abhängt. Eben-

sogut können wir aber auch eine andere, durch T und v bestimmte Größe, etwa den Druck p, als unabhängige Variable einführen, und sowohl T als auch U durch dieselbe ausdrücken; denn da v konstant ist, bestimmt auch der Wert von p den ganzen Zustand. — Nehmen wir nun den allgemeineren Fall an, daß bei der Zustandsänderung auch das Volumen v verändert wird, jedoch so, daß eine bestimmte Relation zwischen Volumen und Temperatur existiert: $f(v, T) = 0$ (wie z. B. bei adiabatischen Zustandsänderungen), wobei f irgend eine Funktion zweier Variabeln bedeutet, so hängt der Zustand auch wieder nur von einer einzigen Variabeln ab: T oder v oder p, von welchen 3 Größen ja stets eine durch die beiden andern mitbestimmt ist. Demgemäß kann die Energie U je nach Belieben als Funktion von T, v oder p dargestellt werden, und so lange man sich auf die eingeführte Bedingung beschränkt, ist es ganz gleichgültig, welche dieser 3 verschiedenen Formen man als den primären Ausdruck der Energie betrachten und der Anschauung zugrunde legen will.

Gehen wir aber zu Prozessen über, deren Verlauf durch 2 voneinander unabhängige Variable bestimmt wird, so schwindet die Willkür in der Darstellung von U um einen Grad. Wenn ein Körper seine Temperatur um dT und zugleich, unabhängig davon, sein Volumen um dv ändert, wodurch auch die Änderung des Druckes dp mitbestimmt ist, so ändert sich seine Energie jedenfalls um einen bestimmten Betrag dU. Dadurch ist dann, wie immer, auch das mechanische Äquivalent der entsprechenden äußeren Wirkungen: die Summe der aufgewendeten Arbeit und der zugeleiteten Wärme, gegeben, und zwar ist dabei im allgemeinen eine dieser beiden Größen, etwa die äußere Arbeit, noch willkürlich, die andere dann dadurch bestimmt. Wir wollen aber nun annehmen, daß die äußere Arbeit gerade in der Überwindung des Druckes p besteht; dann ist sie:

$$A = -p \cdot dv,$$

also nach (1):

$$dU = \quad Q - p \cdot dv.$$

Die zugeführte Wärme Q läßt sich ausdrücken durch die Wärmekapazitäten bei konstantem Volumen: c_v, und bei konstantem Druck: c_p, indem man etwa annimmt, daß der Körper zuerst bei konstantem Volumen durch Wärmezufuhr vom Drucke p auf den Druck $p + dp$, und dann bei konstantem Druck $(p + dp)$ vom Volumen v auf das Volumen $v + dv$ gebracht wird. Benutzen wir nun der Bequemlichkeit halber v und p als unabhängige Variable, so erhalten wir durch leichte Rechnung für die ganze von außen zugeleitete Wärme:

$$Q = c_v \cdot \frac{\partial T}{\partial p} \cdot dp + c_p \cdot \frac{\partial T}{\partial v} \cdot dv,$$

mithin für die Änderung der Energie:

$$(2) \qquad dU = c_v \cdot \frac{\partial T}{\partial p}\, dp + \left(c_p \cdot \frac{\partial T}{\partial v} - p\right) \cdot dv,$$

woraus sogleich folgt:

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(c_v \frac{\partial T}{\partial p}\right) = \frac{\partial}{\partial p}\left(c_p \frac{\partial T}{\partial v} - p\right).$$

Sind speziell c_v und c_p konstant, wie bei vollkommenen Gasen, so wird hieraus:

$$(c_p - c_v) \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial p \cdot \partial v} = 1.$$

In der Tat ist dann:

$$T = \frac{p \cdot v}{c_p - c_v}.$$

Ferner ergibt sich dann aus (2):

$$U = \frac{c_v}{c_p - c_v} \cdot pv \text{ oder } = c_v \cdot T.$$

Jede dieser beiden Formen der Energie ist gleichberechtigt, so lange man die Relation zuläßt, welche das vereinigte Mariotte- und Gay Lussacsche (Boyle- und Charlessche) Gesetz

ausspricht. Man kann also die innere Energie eines Gases sich dann ganz nach Belieben entweder als Spannkraft vorstellen, wodurch das Ausdehnungsbestreben des Gases etwa denselben Charakter bekäme, wie das eines Systems ruhender sich abstoßender Punkte, oder auch als lebendige Kraft, wobei dann die Druckkraft durch den Stoß frei umherfliegender Moleküle geliefert wird. Faßt man aber das Gay Lussac-Mariottesche Gesetz nicht als eine von vorneherein geltende Identität, sondern, wie es in der mechanischen Wärmetheorie geschieht, als die besondere Eigenschaft eines stationär gewordenen Zustandes, indem der Druck p überhaupt nur dann definiert ist, wenn die Geschwindigkeiten der Moleküle eines Gaselements sich nach Größe und Richtung in bestimmter Weise ausgeglichen haben, dann kann die primäre, allein gültige Form der Energie nicht mehr vom Druck abhängen, und man muß notwendig rekurrieren zu dem Ausdruck $c_v \cdot T$, den man, bei geeigneter mechanischer Definition der Temperatur, unter allen Umständen festhalten kann.

Ganz Ähnliches gilt für die Energie U eines beliebigen Körpers, dessen Zustand von 2 Variabeln abhängt. Da durch die sogenannte Zustandsgleichung stets eine Relation zwischen Druck, Volumen und Temperatur gegeben ist, so läßt sich U immer durch beliebige zwei dieser drei Größen ausdrücken und deuten. Bei der mechanischen Auffassung aber wird immer diejenige Form als die primäre auftreten, welche sich auf die unabhängigen Variabeln v und T bezieht, weil der Druck einen erst aus diesen beiden Größen unter besonderen Umständen abgeleiteten Begriff darstellt.

Der innere Zustand eines auf beliebige Weise deformierten im elastischen Gleichgewicht befindlichen homogenen isotropen Körpers hängt ab von 7 Variabeln, nämlich den 6 Deformationsgrößen (S. 197), und der Temperatur. Demgemäß stellt sich auch die innere Energie des Körpers als Funktion dieser 7 Variabeln dar, und nur unter besonderen

Bedingungen (z. B. wenn, wie S. 197 angenommen wurde, die Deformation bei verhinderter Wärmezufuhr stattfindet) kann die Zahl der Variabeln reduziert werden. Die Anwendung des Prinzips der Erhaltung der Energie geht auch hier wieder nach Gleichung (1) vor sich. Die äußere Arbeit A läßt sich im allgemeinen leicht mit Hilfe der Formeln der Elastizitätslehre berechnen, während die von außen zugeleitete Wärme Q nicht unmittelbar durch die bekannten, von der Natur des Körpers abhängigen Konstanten ausgedrückt werden kann, da die Kenntnis der Wärmekapazitäten bei konstantem Druck und bei konstantem Volumen hierzu nicht ausreicht. Je komplizierter überhaupt die Eigenschaften der zu untersuchenden Körper werden, von um so mehr Variabeln wird der Wert der Energie abhängen, und um so weniger willkürlich wird der primäre Ausdruck sein, den man allgemein für die Energie eines Körpers aufstellen kann.

Eine besondere Beachtung verdient noch eine gewisse bisher noch unberücksichtigt gebliebene Art der molekularen Energie eines Körpers, die im Gegensatz zu den bisher behandelten Arten als Oberflächenenergie bezeichnet wird.[1]) Die Erfahrung zeigt, daß die Energie eines Körpers im allgemeinen nicht allein von dessen innerem Zustand, sondern außerdem auch noch von der Form seiner Oberfläche abhängig ist, daß also dem bisher betrachteten Ausdruck der Energie noch ein Glied hinzugefügt werden muß, das von der Beschaffenheit der Oberfläche und von der Natur des angrenzenden Körpers abhängt. Im Grunde genommen ist allerdings diese Energieart ihrem Wesen nach durchaus nicht verschieden von den bisher behandelten Arten; denn man hat sich ja die Berührung zweier Körper niemals so zu denken, daß der innere Zustand der Körper an allen Stellen bis unmittelbar an die Oberfläche der nämliche ist

1) Vgl. J. Cl. Maxwell: Theory of heat. Deutsch von F. Neesen, Braunschw. 1878, p. 318.

und dann plötzlich der Sprung ins benachbarte Medium erfolgt, sondern man hat es immer mit einer körperlichen Grenzschicht, von geringer, aber endlicher Dicke, zu tun, in welcher Kräfte wirksam sind, die von der Beschaffenheit der beiden Medien zugleich abhängen; und die innere Energie dieser Grenzschicht ist es eben, die man als Oberflächenenergie einzuführen pflegt. Durch diese Auffassung erledigt sich zugleich auch die Frage, ob es geboten ist, den Betrag der Oberflächenenergie überhaupt mit zur Energie des Körpers zu rechnen, da dieselbe doch nicht allein von dem Zustand des Körpers selbst, sondern auch von dem seiner Umgebung abhängt. Rechnet man eben die Grenzschicht mit zu dem betrachteten System, so ist die Oberflächenenergie mit in den Ausdruck der Energie des Systems aufzunehmen, im anderen Falle bleibt sie daraus fort, und alle Oberflächenänderungen sind dann als äußere Wirkungen in Anschlag zu bringen.

Die wichtigste Rolle spielt die Oberflächenenergie bei den Körpern, deren Oberfläche sich leicht verändert, also bei den Flüssigkeiten. Auf ein einzelnes Oberflächenelement bezogen wird die Energie natürlich der Größe dieses Elements proportional sein; daher ist die Energie eines endlichen Stücks der Oberfläche, falls an allen Punkten desselben der Zustand der Grenzschicht der nämliche ist, gleich der Größe dieses Flächenstücks, multipliziert mit einer Konstanten, die von der Beschaffenheit der beiden aneinandergrenzenden Medien, ihrer Temperatur usw. abhängig ist. Aus diesem Satz ergeben sich mit Leichtigkeit die Bedingungen des kapillaren Gleichgewichts. Wenn durch die Tätigkeit der an der Oberfläche wirksamen Kräfte Bewegung eintritt, so verwandelt sich Oberflächenenergie in lebendige Kraft der Molarbewegung, und zwar muß dabei die Oberflächenenergie immer abnehmen, weil die lebendige Kraft von dem Werte o ab notwendig wächst. Ist also in einem Zustand der Ruhe die Oberflächenenergie ein

Minimum, so kann keine Bewegung eintreten, weil die Oberflächenenergie nicht mehr abnehmen kann, d. h. es herrscht in diesem Fall stabiles Gleichgewicht. In ähnlicher Weise erledigt sich die Aufgabe, wenn man außer den Oberflächenkräften noch die Schwere als wirksam annimmt.

Gehen wir nun weiter zur Betrachtung von Prozessen, die nicht nur aus physikalischen Veränderungen der beteiligten Körper, sondern auch aus chemischen Wirkungen gebildet sind, sei es, daß es sich handelt um chemische Verbindungen im engeren Sinn, also Reaktionen nach festen Gewichtsverhältnissen, oder auch um sogenannte chemische Mischungen, wohin auch die Vorgänge der Absorption, Lösung usw. zu rechnen sind. In jedem derartigen Fall geht die Anwendung des Energieprinzips nach der Gleichung (1) vor sich; die durch den Prozeß bewirkte Zunahme der Energie des ganzen veränderten Systems ist gleich der Summe der von außen zugeführten Wärme und der von außen aufgewendeten Arbeit. In sehr vielen Fällen ist der Wert der letzteren verschwindend klein gegenüber den übrigen hier in Rechnung kommenden Energiebeträgen, er verschwindet ganz, wenn die Wirkung bei konstantem Gesamtvolumen vor sich geht, kann aber auch bei anderen Reaktionen, die etwa unter konstantem Druck (Atmosphärendruck) erfolgen, häufig vernachlässigt werden, namentlich bei festen und flüssigen Körpern, die ihr Volumen in der Regel so wenig ändern, daß die dabei geleistete äußere Arbeit in Wegfall kommt. Selbst wenn es sich um die Ausdehnung von Gasen handelt, wie bei Verbrennungs- oder Explosionserscheinungen, bildet der Wert der äußeren Arbeit oft einen so geringen Bruchteil der im übrigen sich umsetzenden Energiemengen, daß man selbst bei bedeutenderen Volumenveränderungen diese Arbeit vernachlässigen kann. Läßt man sie fort, so reduziert sich die Gleichung auf

$$U' - U = Q.$$

Die von außen zugeführte Wärme allein ist also gleich der Zunahme der Energie, ihre Größe hängt daher nur ab von dem Anfangs- und Endzustand des Systems, nicht aber von der Art des Überganges. Hierdurch ist der altbekannte Satz (S. 23) ausgesprochen, daß die durch eine Reihe von chemischen Reaktionen erzeugte Wärme unabhängig ist von der Ordnung, in der man die einzelnen Reaktionen vornimmt. Natürlich gilt dieser Satz nur dann, wenn man entweder, wie wir es hier tun, von der äußeren Arbeit ganz absieht, oder doch besonders dafür sorgt, daß sie, wie bei Reaktionen unter konstantem Druck, einen von der Reihenfolge der Zustandsänderungen unabhängigen Wert hat.

Da die Wärme Q direkt beobachtet werden kann, so wird durch die aufgestellte Gleichung eine Messung der Energieänderung ermöglicht. Von hervorragender Wichtigkeit ist der Fall, wo das System nach Beendigung der Reaktion wieder die anfängliche Temperatur und den anfänglichen Druck annimmt. Dann ist Q sehr häufig negativ (exothermische Reaktion), d. h. das System hat Wärme nach außen abgegeben, und in diesem Sinne wird der Betrag von Q als Reaktionswärme, Wärmetönung, Wärmewert, Bildungswärme usw. bezeichnet — ein Begriff, der bekanntlich wohl zu trennen ist von dem der chemischen Verwandtschaft oder Affinität.

Ein besonderer Umstand ist noch bei der Bildung des Wertes U der Energie eines chemisch zusammengesetzten Körpers in irgend einem Zustand zu beachten. Es versteht sich, daß dieser Wert stets auf den nämlichen Nullzustand (S. 114) bezogen werden muß, der zwar anfänglich nach Willkür gewählt werden kann, nachher aber, beim Übergang zu anderen, auch chemisch differenten, Zuständen beizubehalten ist. Da nun die einem beliebigen Zustand entsprechende Energie stets definiert wird durch den Arbeitswert der äußeren Wirkungen, die beim Übergang in den Nullzustand zum Vorschein kommen, so wird man die Wahl

des Nullzustandes am besten mit Rücksicht darauf einrichten, daß der Übergang in denselben möglichst leicht zu vollziehen ist. So lange es sich daher nur um physikalische Änderungen des Körpers handelt, wird man als Nullzustand irgend einen bequem gelegenen Zustand des nämlichen Körpers nehmen; dann ist der Übergang in den Nullzustand nur ein rein physikalischer Vorgang. Wenn aber chemische Änderungen in Betracht kommen, so wird im allgemeinen jener Übergang mit chemischen Wirkungen verbunden sein müssen. Gesetzt z. B., es handle sich um die vollständige oder teilweise Zersetzung einer Quantität Wasser, so wird man behufs Auffindung des Wertes der Energie als Nullzustand am bequemsten die entsprechenden Mengen Sauerstoff und Wasserstoff vollständig getrennt nebeneinander, etwa bei 0^0 C und 1 Atmosphäre, annehmen. Dann ist in jedem Zustand des Systems, bei beliebig vorgeschrittener Zersetzung, die Energie leicht zu definieren; denn für irgend eine getrennte Sauerstoff- oder Wasserstoffmenge ist sie durch den physikalischen Übergang zu 0^0 C und 1 Atmosphäre Druck gegeben, während dagegen für ein Quantum Wasser noch die chemische Zerlegung in die beiden Elemente hinzukommt. (Daß man statt dessen auch den umgekehrten Vorgang: die Bildung von Wasser, zur Definition der Energie benutzen kann, ist oben S. 113 allgemein ausgeführt worden.)

Hieraus erhellt, daß, sobald es sich um Änderungen in der chemischen Zusammensetzung eines Körpers handelt, zu der physikalischen Energie des Körpers noch eine additive Konstante hinzuzufügen ist: die chemische Energie, welche immer gleich und entgegengesetzt ist dem Wärmewert der Bildung des Körpers aus seinen Bestandteilen. Beim Übergang in den Nullzustand (Zersetzung des Körpers) tritt dann die chemische Energie als positive oder negative Wärme auf. Dies gilt auch für Lösungen, Mischungen usw.: so ist die Energie irgend einer Salzlösung gleich zu setzen

der negativen Lösungswärme des Salzes. Dieser Wert genügt, wenn man sich beschränkt auf die Untersuchung von Veränderungen in dem Prozentgehalt der Lösung; dehnt man aber die Betrachtung aus auf Prozesse, in denen das Salz oder das Lösungsmittel selber Zersetzungen erleiden, so ist in den Ausdruck der Energie noch ein weiteres Glied aufzunehmen, welches gleich ist der bei der Zerlegung der betreffenden Substanz in ihre weiteren Bestandteile frei werdenden Wärme.

Bei der Anwendung des Energieprinzips auf chemische Prozesse ist es natürlich ebenso wenig, wie in anderen Fällen, notwendig, alle an der Reaktion teilnehmenden Körper als Ein System (Grundsystem S. 136) aufzufassen, vielmehr kann man ganz nach Belieben einen bestimmten, endlichen oder unendlich kleinen, materiellen Komplex herausgreifen und dessen Energieänderung untersuchen. Dieselbe ist, wie immer, gleich dem mechanischen Äquivalent der äußeren Wirkungen, welche bei der betreffenden Zustandsänderung aufgewendet werden. Im übrigen bedient man sich zur praktischen Bestimmung der chemischen Energie mit Vorteil der Sätze, die wir im vorigen Abschnitt S. 113f. erörtert haben.

3. Elektrische und magnetische Energie.

Unter allen Schlußfolgerungen, die das Prinzip der Erhaltung der Energie auf die Wirkungsgesetze der verschiedenen in der Natur tätigen Kräfte zu ziehen gestattet, beanspruchen ein besonders hervorragendes Interesse die auf Elektrizität und Magnetismus bezüglichen; denn in keinem anderen Teile der Physik kommt die Fruchtbarkeit jenes Prinzips so zur reinen, unmittelbaren Geltung. Was nämlich zunächst die Mechanik betrifft, so hatte dieselbe schon eine beträchtliche Zeit vor der Entdeckung des allgemeinen Energieprinzips einen hohen Grad ihrer Aus-

bildung erreicht, es blieb also für die Anwendung des Prinzips auf die Lehre von den Bewegungserscheinungen nichts anderes übrig, als dessen Übereinstimmung mit den bereits auf anderem Wege hinlänglich sicher gestellten Gesetzen hinterher nachzuweisen und so Einen bekannten Satz an einem andern bekannten zu verifizieren. Etwas anders verhielt es sich schon in der Wärmelehre: hier griff das neu entdeckte Prinzip mächtig gestaltend ein in die Entwicklung der Vorstellungen, die man sich von der Natur der thermischen Vorgänge zu bilden suchte; doch auch auf diesem Gebiete der Forschung blieb es nicht lange der einzig anerkannte und bewährte Führer. Seitdem sich die hohe Fruchtbarkeit der mechanischen Auffassung der Wärme gezeigt hat, ist man in der Regel viel mehr geneigt, sich bei der Betrachtung thermischer Prozesse von der Vorstellung rein mechanischer Vorgänge leiten zu lassen, als auf das allgemeine, von diesen Vorstellungen unabhängige Energieprinzip zurückzugehen; denn das ist ja ohne weiteres einleuchtend, daß die Rücksichtnahme auf letzteres allein bei weitem nicht jene zur Erzielung einer deutlichen Anschauung erforderliche Spezialisierung der Ideen gewährt, welche uns gerade die mechanische Vorstellung so wertvoll macht.

Von den eben geschilderten ganz verschiedenartige Verhältnisse treffen wir nun aber auf dem Gebiet der Elektrizität und des Magnetismus an. Bisher ist es noch keineswegs gelungen, die Mannigfaltigkeit der Erscheinungen, die uns hier entgegentreten, unter eine einheitliche Anschauung zusammenzufassen, d. h. auf eine durchgreifende Analogie mit Erscheinungen, die uns von anderer Seite her bekannt und durch Gewohnheit vertraut geworden sind, z. B. mechanischer Natur, zurückzuführen, und es ist vielleicht zweifelhaft, ob dies je gelingen wird; jedenfalls aber sehen wir uns bei der Übernahme der Aufgabe, die Gesetze der Elektrizität aufzufinden, von vorneherein im Besitz keines anderen

zuverlässigen Hilfsmittels der Forschung, als einzig und allein des Prinzips der Erhaltung der Energie. Hier tritt also die Bedeutung des Prinzips am klarsten zutage: abgelöst von allen Nebenvorstellungen bildet es den einzig sicheren Ausgangspunkt der Untersuchung, indem es den leitenden Ideengang angibt, der für die rationelle Verwertung der Ergebnisse von Experiment und Beobachtung wesentliche Vorbedingung ist.

Allerdings muß hier gleich die Bemerkung angefügt werden, daß es im Interesse einer bequemen und verständlichen Ausdrucksweise oft unausweichlich geboten erscheint, sich bei der Anwendung des Prinzips auf bestimmte einzelne Prozesse einer Terminologie zu bedienen, die an gewisse spezielle Vorstellungen von der Wirkungsweise der Elektrizität erinnert; wir reden z. B. von der Elektrizität, als ob sie ein besonderer Stoff wäre, der sich bewegt, der Kräfte ausübt usw. Indes involvieren diese Ausdrücke keineswegs irgend ein Urteil über die Natur der elektrischen Wirkungen, dieselbe bleibt vielmehr vollkommen offen; ja sogar die der endgültigen Entscheidung jetzt schon einigermaßen nahe gerückte Frage, ob Elektrizität und Magnetismus unvermittelt in die Ferne wirken, oder ob vielmehr die Wirkungen durch entsprechende Veränderungen des Zwischenmediums zustande kommen, können wir vorläufig noch ganz unentschieden lassen, wiewohl wir manchmal, um die Anschauung einigermaßen zu fixieren, genötigt sein werden, unseren Bezeichnungen die eine oder die andere Vorstellungsweise zugrunde zu legen.

Alle elektrischen und magnetischen Wirkungen lassen sich in zwei große Gruppen einteilen, je nachdem sie Bewegungen der ponderablen Materie selber (Stromleiter, magnetisierte Körper usw.) oder Veränderungen des inneren elektrischen oder magnetischen Zustandes der Körper verursachen. Wir wollen diese beiden Arten von Wirkungen, wie es gewöhnlich geschieht, als ponderomotorische

(mechanische) und als Induktions- (elektromotorische, magnetomotorische) Wirkungen kennzeichnen; bei jeder Anwendung unseres Prinzips haben wir auf beide Rücksicht zu nehmen.

Beschäftigen wir uns nun zunächst mit Prozessen, welche hervorgerufen werden durch die Wirkungen von Elektrizitätsmengen, die in den Körpern ruhen. Gesetzt: eine Anzahl materieller Punkte, ein jeder mit einem bestimmten Quantum Elektrizität geladen, befinde sich in einem isolierenden Medium (Luft); dann werden sich die Wirkungen der Elektrizitäten auf die ponderomotorischen beschränken, und die Punkte werden sich unter dem Einfluß derselben zu bewegen anfangen, wobei wir einfach annehmen wollen, daß das Medium der Bewegung keinen merkbaren Widerstand entgegensetzt. Der Vollständigkeit halber müssen wir allerdings noch eine andere Voraussetzung hier mit aufnehmen, die wir auch in der Folge beibehalten werden, nämlich die, daß die relativen Geschwindigkeiten der sich bewegenden Körper stets verschwindend klein sind gegen die sogenannte kritische Geschwindigkeit (300 000 km in der Sekunde) weil sonst zu den elektrostatischen gewisse elektrodynamische Wirkungen hinzutreten, die wir erst später zu berücksichtigen haben. Dann wird uns die bequemste Anschauung des ganzen Verlaufs der Bewegung durch die Vorstellung gewährt, daß die Elektrizitäten in die Ferne aufeinander wirken, die gleichnamigen abstoßend, die ungleichnamigen anziehend, nach dem allgemeinen Newtonschen Gravitationsgesetz.

Wenn keine äußeren Wirkungen auf das System ausgeübt werden, so ist seine Energie konstant; dieselbe besteht aber aus zwei Teilen: der lebendigen Kraft der bewegten Punkte, und dem Potenzial der wirkenden Kräfte (S. 187). Dies Potenzial:

$$P = \sum' \frac{e \cdot e'}{r},$$

wobei e und e', mit entsprechenden Vorzeichen, die elek-

trischen Ladungen zweier Punkte (jede Kombination einmal genommen), r ihre Entfernung (stets positiv) bezeichnet, ist also in diesem Falle als elektrostatische Energie U anzusehen. Ihre Änderung in einer gewissen Zeit ist gleich und entgegengesetzt der in dieser Zeit von den elektrisch-ponderomotorischen Kräften geleisteten Arbeit.

Aus dem Ausdruck von P ist leicht zu sehen, daß das elektrische Potenzial mehrerer Systeme gleich ist der Summe der Potenziale der Systeme auf sich selbst, vermehrt um die Summe der Potenziale je zweier Systeme aufeinander.

Da P als Energie die Dimension einer Arbeitsmenge besitzt, so wird durch die obige Gleichung zugleich das elektrostatische Maß der Elektrizität vermittelt; hiermit erledigt sich auch eine Frage, die man gelegentlich aus Schülermund zu hören bekommt: welches denn das mechanische Äquivalent der Elektrizität, genauer: des elektrischen Potenzials, sei. Dasselbe ist = 1, und zwar im elektrostatischen ebenso wie im magnetischen Maße, für welches letztere allerdings die obige Gleichung nicht mehr gilt.

Greift man aus der ganzen Menge der Punkte eine beschränkte Zahl heraus und betrachtet sie als Grundsystem (S. 136), so verändert sich bei einer eintretenden Bewegung die Energie dieses Systems um den Betrag der aufgewendeten äußeren Wirkungen. Derselbe ist hier offenbar die Arbeit der ponderomotorischen Kräfte, welche von den außerhalb gelegenen Punkten an den Punkten des Grundsystems geleistet wird. —

Etwas anders gestaltet sich der Vorgang, wenn als Träger der Elektrizität nicht einzelne Punkte, sondern räumlich ausgedehnte Leiter erscheinen, weil in diesem Fall zu den ponderomotorischen noch Induktionswirkungen hinzutreten. Wir können annehmen, daß die zur Herstellung des elektrischen Gleichgewichts innerhalb eines Leiters erforderliche Verschiebung der Elektrizitäten mit einer gegen die

Bewegungen der Leiter unendlich großen Geschwindigkeit vonstatten geht; dann entspricht einer jeden Konstellation des Leitersystems eine bestimmte Anordnung der Elektrizitäten in den Leitern, welche durch die Bedingung gegeben ist, daß der Wert der elektrischen Potenzialfunktion:

$$\varphi = \sum \frac{e}{r},$$

für alle Punkte eines und desselben Leiters konstant ist, während im umgebenden Isolator (Luft) überall die Bedingung: $\triangle\varphi = 0$ gilt. Hierdurch und durch die gegebenen Ladungsquantitäten der Leiter ist die Funktion φ bestimmt, während die elektrische Dichte an der Oberfläche eines Leiters den Wert hat: $-\frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial n}$, wenn n die nach dem Innern des Isolators gezogene Normale bedeutet.

Nehmen wir nun an, daß die Leiter sich unter dem Einfluß der von ihren Ladungen ausgehenden Kräfte bewegen, und betrachten wir die Änderung, welche das elektrische Potenzial des ganzen Systems auf sich selbst:

$$P = \sum' \frac{e\acute{e}}{r} \text{ oder auch } = \frac{1}{2} \cdot \sum e \cdot \varphi,$$

in einem Zeitelement erleidet. Zu diesem Zwecke zerlegen wir die ganze unendlich kleine Änderung, die das System erfährt, in zwei Teile: 1) die Leiter verändern ihre Lage im Raum, während die Elektrizitäten in ihnen fest liegen, 2) die Elektrizitäten nehmen in den Leitern, während diese selbst ruhen, die durch die veränderte Konstellation bedingte neue Gleichgewichtslage an. Durch jeden dieser beiden Vorgänge wird P verändert werden, und zwar ist leicht einzusehen, daß die erste Änderung nichts anderes ist als die negative Arbeit der ponderomotorischen Kräfte, ebenso wie in dem vorher behandelten Fall, während die zweite Änderung gegen die erste unendlich klein ist. Denn die neue

elektrische Verteilung unterscheidet sich von der anfänglichen dadurch, daß zu jedem ursprünglich vorhandenen elektrischen Teilchen e ein unendlich kleines (positives oder negatives) Teilchen δe hinzugetreten ist, und die hierdurch bedingte Änderung des gesamten elektrischen Potenzials ist nach S. 230 gleich dem Potenzial aller neu hinzugekommenen Elektrizitäten δe auf die ganze ursprünglich vorhandene Ladung e. (Denn das Potenzial der neu hinzugekommenen Elektrizitäten auf sich selbst ist klein von höherer Ordnung.) Die gesuchte Änderung beträgt also: $\Sigma(\varphi \delta e)$, und diese Summe ist für jeden einzelnen Leiter gleich 0, da φ in ihm überall den nämlichen Wert hat, und seine Gesamtladung Σe unverändert bleibt.

Mithin wird die zeitliche Änderung des Potenzials: δP, vollständig dargestellt durch die negative ponderomotorische Arbeit, d. h. durch die Abnahme der lebendigen Kraft der sich bewegenden Leiter; die Summe des Potenzials und der lebendigen Kraft ist also konstant. Da nun andrerseits die Gesamtenergie des Systems konstant bleibt, so folgt, daß zu der kinetischen Energie noch eine elektrostatische U hinzutritt, die auch in diesem Fall wieder gemessen wird durch das positive elektrische Potenzial P. Daher bestehen die Wirkungen, die durch einen Bewegungsvorgang wie den eben betrachteten hervorgerufen werden, lediglich in der wechselseitigen Umsetzung elektrostatischer und kinetischer Energie. Die Induktionswirkungen, welche dabei in den Leitern vor sich gehen, haben keinen endlichen Arbeitswert und können daher auch keine Stromwärme liefern; denn wiewohl durch einen Querschnitt eines Leiters in einer endlichen Zeit im allgemeinen eine endliche Elektrizitätsmenge hindurchfließt, so ist doch die dabei von ihr geleistete Arbeit unendlich klein, weil der Strom kein endliches Potenzialgefälle hat.

Eine thermische Wirkung findet nur dann statt, wenn zwei Leiter in solche Nähe kommen, daß sie ihre Ladungen

gegenseitig ausgleichen können. In diesem Fall tritt in dem Werte der elektrostatischen Energie eine schnelle Verminderung ein, die aber nicht der lebendigen Kraft der Leiterbewegung, sondern der Molekularenergie zugute kommt. Handelt es sich um Wärmeerzeugung (bei der Entladung elektrischer Batterien), so ist hierdurch direkt die Menge der Entladungswärme in mechanischem Maße gegeben. Die Verwandlung der Elektrizität in Wärme erfolgt allerdings nicht momentan, sondern es spielen sich in der Regel mehr oder weniger komplizierte elektrodynamische Vorgänge (oszillierende Entladung) ab; indessen sind im Endzustand alle Energiearten wieder reduziert auf thermische und elektrostatische Energie.

Gehen wir nun weiter über zu dem Fall, daß außer den Leitern auch noch Dielektrika im System vorhanden sind. Der Einfachheit halber wollen wir im folgenden die Dielektrika, wie die Leiter, zunächst als starr voraussetzen, und nur die letzteren mit gewissen gegebenen Elektrizitätsmengen geladen annehmen; beide Arten von Körpern mögen sich frei in einem vollständig isolierenden unpolarisierbaren Medium bewegen. Die Konstitution eines Dielektrikums definieren wir nach Faraday dahin, daß in ein absolut isolierendes Medium eine sehr große Anzahl von sehr kleinen leitenden Körperchen eingefügt ist, in denen unter dem Einfluß elektrischer Kräfte eine elektrische Verteilung gerade so induziert wird, wie in endlich ausgedehnten Leitern. In der mathematischen Behandlung führt diese Annahme zu der von Poisson begründeten Theorie der dielektrischen Polarisation, nach welcher das auf die Volumeneinheit bezügliche dielektrische Moment in irgend einem Punkte eines Dielektrikums an Richtung gleich und an Größe proportional ist der an diesem Punkte wirkenden elektrischen Kraft, und außerdem einer von der Beschaffenheit des Dielektrikums abhängenden Konstanten. Die Komponenten dieses Moments genügen also den Gleichungen:

$$(1)\quad \lambda = -\varkappa \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \mu = -\varkappa \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \nu = -\varkappa \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Je größere Werte die positive Konstante $\varkappa$ annimmt, um so mehr nähert sich das Verhalten des Dielektrikums dem eines Leiters. Für $\varkappa = 0$ verschwindet dagegen die Polarisation ganz.

Da durch die oben zugrunde gelegte Vorstellung die dielektrische Polarisation vollständig zurückgeführt ist auf die Erscheinungen, welche vollkommene Leiter darbieten, so dürfen wir die S. 232 für die Anwendung des Energieprinzips gewonnenen Resultate ohne weiteres auf diesen Fall übertragen. Der Wert der elektrostatischen Energie U ist also auch hier gegeben durch das elektrische Potenzial des ganzen Systems auf sich selbst, d. h. durch den Ausdruck:

$$P = \frac{1}{2} \sum e \cdot \varphi.$$

Da nun in einem jeden der kleinen leitenden Körperchen, aus denen ein Dielektrikum zusammengesetzt ist, φ einen konstanten Wert besitzt, und außerdem die betreffende Ladungsquantität gleich 0 ist, so verschwindet diese Summe für alle Elektrizitätsmengen e, die sich in den Dielektrika befinden, und braucht allein auf die mit endlichen Ladungen versehenen Leiter ausgedehnt zu werden. Das Vorhandensein eines Dielektrikums hat auf den Wert der elektrostatischen Energie nur insofern Einfluß, als die Potenzialfunktion φ dadurch modifiziert wird.

Das Charakteristische der Wirkungsweise eines Dielektrikums wird der Anschauung erheblich näher gerückt und der Rechnung besser zugänglich gemacht durch den bekannten Satz, daß sich die in einem Dielektrikum befindlichen Elektrizitäten bezüglich aller ihrer physikalischen Wirkungen vollständig ersetzen lassen durch eine einfache elektrische Schicht, welche auf der Oberfläche des Dielektrikums ausgebreitet ist und in irgend einem Punkte derselben die Dichte hat:

$$-\{\lambda \cos(nx) + \mu \cos(ny) + \nu \cos(nz)\} = \kappa \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial n},$$

wobei n die Richtung der nach dem Innern des Dielektrikums gezogenen Normale bedeutet. Die Gesamtmasse dieser Schicht ist gleich o.

Während also die Potenzialfunktion φ mit ihren Differenzialquotienten in allen Punkten des Raumes, innerhalb und außerhalb der Dielektrika, den nämlichen Wert behält, wenn man die elektrische Verteilung in einem Dielektrikum ersetzt durch die genannte fingierte Flächenschicht, so ist doch wohl zu beachten, daß dasselbe nicht der Fall ist mit dem Werte des Potenzials aller im System vorhandenen Elektrizität auf sich selbst. Denn der allgemeine Ausdruck dieses Potenzials: $P = \frac{1}{2}\sum e \cdot \varphi$ liefert hier einen von dem obigen verschiedenen Wert, wie man sogleich erkennt, wenn man denjenigen Teil der Summe ins Auge faßt, der von den Elektrizitäten e der fingierten Flächenschichten herrührt. Da nämlich auf der Oberfläche eines Dielektrikums die Potenzialfunktion φ nicht überall konstant ist, so wird die entsprechende Summe im allgemeinen einen von o verschiedenen Wert annehmen, während sie doch in dem oben betrachteten Fall, auf die Elektrizitäten e des Dielektrikums bezogen, o wurde. Andrerseits erhalten wir dagegen für die in den Leitern enthaltenen Elektrizitäten e genau die nämlichen Zahlen wie oben; daher wird der resultierende Wert des Potenzials P hier jedenfalls ein anderer sein als in dem vorher betrachteten Falle. Aus dem Gesagten geht hervor, daß man, sobald die elektrische Verteilung in einem Dielektrikum ersetzt gedacht wird durch die ihr physikalisch äquivalente Oberflächenschicht, zwischen den Begriffen: Potenzial P und Energie U zu unterscheiden hat; denn letztere Größe bleibt natürlich vermöge ihrer physikalischen Bedeutung in beiden Fällen die nämliche.

Dieser Unterschied ergibt sich auch dann unmittelbar,

wenn wir eine schon früher angestellte Überlegung benutzen, um aus dem Potenzial die Energie abzuleiten. Betrachten wir die unendlich kleine Änderung δP, welche das Potenzial P bei der Bewegung der Leiter und Dielektrika in einem Zeitelement erleidet, so können wir uns dieselbe in zwei Teile zerlegt denken: 1. die Änderung infolge der räumlichen Verschiebung der Leiter und Dielektrika, während die Elektrizitäten in ihnen fest liegen, 2. die Änderung infolge der neuen Anordnung der Elektrizitäten in den Körpern, während diese selbst im Raume fixiert sind. Die erste Änderung stellt die negative Arbeit der ponderomotorischen Kräfte vor, also die Abnahme der lebendigen Kraft L, die zweite aber ist gleich dem Potenziale aller neu hinzugetretenen Elektrizitäten δe auf die ursprünglich vorhandenen e (S. 232), also $= \Sigma(\varphi \delta e)$, mithin haben wir:

$$\delta P = -\delta L + \Sigma(\varphi \delta e),$$

oder, da die Gesamtenergie: $L + U =$ konst.:

$$\delta P = \delta U + \Sigma(\varphi \delta e).$$

Das zweite Glied auf der rechten Gleichungsseite ist nun keineswegs $= 0$, wenn für den elektrischen Zustand der Dielektrika die entsprechende Oberflächenbelegung substituiert ist, weil φ auf der Oberfläche eines Dielektrikums nicht konstant ist, wohl aber läßt sich jenes Glied mit Hilfe der für das Gleichgewicht der Elektrizität aufgestellten Bedingungen als vollständiges Differenzial einer bestimmten Funktion des Zustandes erweisen, indem wir nach Umformung in ein Raumintegral unter Benutzung von (1) durch Integration nach der Zeit erhalten:

$$(2) \qquad P = U - \int \frac{d\tau}{2\kappa} \cdot (\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2),$$

wobei das Integral über die Volumenelemente $d\tau$ aller Dielektrika zu erstrecken ist. Natürlich ist die Differenz der Größen P und U die nämliche wie die bereits oben kon-

statierte. Für $\kappa = \infty$ (Dielektrikum vollkommen polarisierbar) gehen Energie und Potenzial ineinander über, ebenso auch für $\kappa = 0$ (Dielektrikum vollkommen unpolarisierbar), weil dann $\lambda, \mu, \nu = 0$ werden.

In derselben Weise läßt sich der Fall behandeln, daß die Dielektrika von vorneherein mit bestimmten Elektrizitätsmengen geladen sind, die ihnen von außen, sei es auf die Oberfläche, sei es in das Innere, zugeführt worden sind. Hier führt das Prinzip der Übereinanderlagerung der Wirkungen einfach zum Ziel. Wenn ferner die Dielektrika statt durch starre, durch flüssige oder deformirbare feste Körper repräsentiert werden, welche die zwischen den Leitern befindlichen Räume auch kontinuierlich ausfüllen können, so kann man ähnliche Betrachtungen ebenfalls mit Erfolg anstellen, wobei noch Rücksicht darauf zu nehmen sein wird, daß die Dielektrizitätskonstante κ im allgemeinen veränderlich ist mit dem Deformationszustand der dielektrischen Substanz.[1])

Wir können die bisherigen, auf Elektrostatik bezüglichen Betrachtungen in folgenden Satz zusammenfassen: In allen Fällen, wo elektrisch geladene Leiter und Dielektrika sich unter wechselseitiger Einwirkung bewegen, wird, solange die für die elektrische Verteilung oben (S. 234) aufgestellten Gleichungen gelten, die elektrische Energie immer nur in lebendige Kraft der Molarbewegung umgesetzt, und zwar ist die Größe der elektrischen Energie U gegeben durch den Wert des Potenzials P der gesamten im System vorhandenen Elektrizität auf sich selbst, mit einer durch Gleichung (2) gegebenen Modifikation für den Fall, daß statt der Anordnung der Elektrizitäten in einem Dielektrikum die entsprechende Oberflächenschicht gesetzt wird. Eine Ausnahme

---

1) H. v. Helmholtz: Über die auf das Innere magnetisch oder dielektrisch polarisierter Körper wirkenden Kräfte. Wied. Ann. 13, p. 385, 1881. Wiss. Abh. I, p. 798.

erleidet dieser Satz nur dann, wenn zwei Leiter sich so nahe kommen, daß ein Ausgleich ihrer Ladungen stattfindet; in diesem Falle entsteht molekulare Energie.

Es versteht sich, daß mittelst der Bedingungsgleichungen, welche für das elektrische Gleichgewicht gelten, der Ausdruck der elektrischen Energie auf sehr mannigfache Formen gebracht werden kann, die sich jedoch nur in bezug auf mathematische Brauchbarkeit unterscheiden, während sie in physikalischer Hinsicht ganz gleichberechtigt sind, so lange eben jene Gleichungen bestehen. Daher ist es auch für die Anwendung des Energieprinzips vollständig gleichgültig, ob man von der Annahme einer unmittelbaren Fernewirkung ausgehend den Ausdruck der Energie aus den Kombinationen je zweier endlich entfernter elektrischer Teilchen zusammensetzt, oder ob man unter der Voraussetzung von rein molekularen Wirkungen die Energie durch Summierung über alle in elektrischem Zwangszustand befindlichen Raumelemente bildet: der Zahlenwert der Energie ist in beiden Fällen der nämliche. Eine Entscheidung zugunsten einer bestimmten der beiden genannten Theorien kann nur gewonnen werden durch Beobachtung von Erscheinungen, bei denen die oben für das elektrische Gleichgewicht angenommenen Bedingungen nicht bestehen; wir werden später auf diese Frage zurückkommen.

Wenden wir uns jetzt zur näheren Untersuchung eines Falles, den wir oben von der Besprechung ausschließen mußten: der Berührung mehrerer Leiter. Zunächst denken wir uns zwei starre metallische Leiter, die sich längs einer beliebigen Fläche berühren, in einem isolierenden unpolarisierbaren Medium befindlich, welches noch beliebige andere elektrisierte Leiter enthält, und mit einer bestimmten Quantität Elektrizität geladen. Wie die Erfahrung zeigt, ordnet sich die Elektrizität in beiden Leitern so an, daß ihre Potenzialfunktion φ an der Grenzfläche der Leiter einen nur von dem molekularen Zustand (Substanz, Temperatur)

der Körper abhängigen Sprung erleidet, während sie im Innern jedes Leiters in Übereinstimmung mit dem Bisherigen konstant ist. Daraus geht mit Notwendigkeit hervor, daß sich an der Grenzfläche eine elektrische Doppelschicht befindet, bestehend aus zwei einfachen sich sehr nahe gegenüberliegenden elektrischen Schichten von entgegengesetzter und gleicher Dichte, da in den Werten (alle = o) der Differenzialquotienten von φ keine Unstetigkeit eintritt. Wird das Produkt aus der Dichte der positiven Schicht in den Abstand der Schichten (das Moment der Doppelschicht) mit ω bezeichnet, so wächst φ beim Durchgang durch die Doppelschicht in positiver Richtung, d. h. von der negativen zur positiven Schicht, um $4\pi \cdot \omega = \varphi_0$. (Elektrische Spannung.) Hierdurch ist ein Mittel gegeben, um ω auf elektrostatischem Wege zu messen, während die Größe der beiden Faktoren, aus denen ω gebildet ist, sich nur annähernd schätzen läßt. Helmholtz hat gezeigt, daß die Bildung einer solchen Doppelschicht zurückgeführt werden kann auf die Wirksamkeit von spezifischen Anziehungskräften der ponderablen Moleküle der Leitersubstanzen auf die Elektrizitäten; dann stellt sich die elektrische Spannung als die Arbeit dar, welche diese Kräfte leisten, wenn eine positive Elektrizitätseinheit die Schicht in der obengenannten Richtung durchschreitet. Nimmt man noch die Bedingungen hinzu, welche die Potenzialfunktion φ und ihre Differenzialquotienten im Innern der Leiter, im äußeren Raum und an der Grenze beider erfüllen müssen, sowie diejenigen, welche durch die Quantität der Ladungen des Leiterpaares und der übrigen Leiter gegeben werden, so ist für jede Konstellation des Leitersystems im Raum nur ein einziger Wert von φ und damit nur eine einzige Anordnung der Elektrizität möglich.

Bilden wir nun wieder den Ausdruck der elektrostatischen Energie des Systems U, also das Potenzial der gesamten Elektrizität auf sich selbst: $P = \frac{1}{2} \sum e \cdot \varphi$ und untersuchen

wir die Änderung, welche diese Größe in einem Zeitelement erleidet, wenn sich die beiden fest verbundenen Leiter gleichzeitig mit den andern im elektrischen Felde befindlichen Leitern unter dem Einfluß der elektrischen Kräfte bewegen. Diese Änderung δP läßt sich auch hier wieder sukzessive hervorgebracht denken 1. durch eine Verschiebung der Leiter, während die Elektrizitäten in ihnen fest liegen (negative ponderomotorische Arbeit oder Abnahme der lebendigen Kraft: $-\delta L$), 2. durch eine Veränderung der elektrischen Anordnung in den ruhenden Leitern, wobei man sich vorstellen kann, daß zu jedem elektrischen Teilchen e des Systems ein positives oder ein negatives δe hinzutritt. Dann ist die entsprechende Änderung des Gesamtpotenzials gleich dem Potenziale der Elektrizitäten δe auf die ursprünglich vorhandenen e (S. 232) also $= \Sigma(\varphi \delta e)$. Für einen isolierten Leiter ist diese Summe gleich 0, da φ in ihm konstant, dagegen für das fest verbundene Leiterpaar ist sie, wie man leicht einsieht, gleich $\varphi_0 \cdot \delta E$, wenn φ_0 die Potenzialdifferenz der Leiter, δE die ganze während des betrachteten Zeitelements in positiver Richtung von einem zum andern Metall übergegangene positive Elektrizitätsmenge bezeichnet; dabei betrachten wir der Einfachheit halber nur die positive Elektrizität als beweglich. Wir haben also:

$$\delta U = \delta P = -\delta L + \varphi_0 \cdot \delta E,$$

oder:

$$\delta U + \delta L - \varphi_0 \cdot \delta E = 0.$$

Hieraus erhellt das wichtige Resultat, daß in dem betrachteten Falle die Summe der lebendigen Kraft L und der elektrostatischen Energie U keineswegs konstant ist; vielmehr können beide Größen sogar gleichzeitig wachsen oder abnehmen; ihre Summe stellt daher auch nicht die Gesamtenergie des Systems vor, sondern es muß hier noch eine dritte Energieart ins Spiel kommen, deren Änderung die beiden erstgenannten Änderungen gerade kompensiert.

Der Betrag derselben ist unmittelbar bekannt, es ist das Produkt der elektrischen Spannung der Metalle in die vom negativen zum positiven Metall übergegangene positive Elektrizitätsmenge; unter welcher physikalischen Form man sich aber diese Energieart vorzustellen hat, darüber ist heutzutage noch keine endgültige Entscheidung gefällt worden.

Es kommen hier hauptsächlich zwei Ansichten in Betracht, die im folgenden erörtert werden sollen. Nach der einen Anschauung gibt es außer der gewöhnlichen elektrostatischen Energie, die von den Wechselwirkungen der Elektrizitäten untereinander herrührt, noch eine besondere Energieart potenzieller Natur, die ihren Ursprung hat in den Wirkungen, welche von den ponderablen Molekülen auf die Elektrizität ausgeübt werden — man könnte sie daher als „elektromolekulare" Energie bezeichnen. Danach kommt einem jeden elektrischen Teilchen e stets eine besondere elektromolekulare Energie zu; ihr Betrag ist gleich dem Produkt aus der Elektrizitätsmenge e in eine Konstante u, die abhängig ist von der molekularen Beschaffenheit (Substanz, Temperatur) des Leiters, in dem es sich augenblicklich befindet, nicht aber von dessen elektrischem Zustand. Es ist klar, daß diese Annahme ihren Zweck ohne weiteres erfüllt; denn so lange eine Elektrizitätsmenge δE sich zwischen Molekülen des nämlichen Leiters bewegt, bleibt ihre elektromolekulare Energie: $u \cdot \delta E$, eine ganz bestimmte Größe, konstant; sobald sie aber in einen anderen Leiter übergeht, so ändert sich deren Betrag um $(u' - u) \cdot \delta E$. Man hat also nur die Differenz $u' - u$ gleich und entgegengesetzt der bekannten elektrischen Spannung φ_0 anzunehmen, um diejenige Veränderung der Energie zu erhalten, welche durch das Prinzip der Erhaltung der Energie verlangt wird; eine additive Konstante bleibt in dem Werte von u willkürlich. Dann wird dem Prinzip dadurch genügt, daß in dem ganzen betrachteten System die Summe der lebendigen Kraft, der

elektrostatischen Energie und der elektromolekularen Energie eine von der Zeit unabhängige Größe ist.

Da die geschilderte Hypothese den Wert der elektrischen Spannung φ_0 zweier Leiter als Differenz zweier, nur von der Natur der Leiter abhängiger Größen u und u' erscheinen läßt, so gewährt sie offenbar zugleich den Vorteil, daß sich aus ihr mit Notwendigkeit das Voltasche Spannungsgesetz ergibt; aus demselben Grunde versagt sie aber ihren Dienst für Leiter zweiter Klasse.

Ihr gegenüber läßt sich nun aber eine andere Anschauung geltend machen, die davon ausgeht, daß eine derartige besondere Energieart, wie die eben beschriebene elektromolekulare Energie, gar nicht existiert, sondern daß der oben konstatierte Fehlbetrag an Energie durch eine entsprechende Veränderung der gewöhnlichen molekularen (thermischen, chemischen) Energie gedeckt wird. Hiernach wäre die Summe der lebendigen Kraft, der elektrostatischen Energie und der molekularen Energie unveränderlich, und es müßte also bei dem oben untersuchten Bewegungsvorgang im Zusammenhang mit der nachgewiesenen Änderung der bekannten Energiearten molekulare (hier thermische) Energie vom Betrage: $-\varphi_0 \cdot \delta E$ zum Vorschein kommen. Allgemeiner würde diese Forderung lauten: jedesmal, wenn eine positive Elektrizitätsmenge eine elektrische Doppelschicht in positiver Richtung durchschreitet, tritt eine Verminderung von molekularer Energie ein, um den Betrag des Produktes der Elektrizitätsmenge in die durch die Doppelschicht bedingte Potenzialdifferenz. Dagegen würde der Übergang von Elektrizität aus einem Leiter in einen andern an und für sich, d. h. ohne Arbeitsleistung von Kräften elektrischen Ursprungs, keinerlei Energieänderung involvieren.

Die experimentelle Prüfung dieses Satzes führt nun in der Tat zu Erscheinungen, welche sich als Bestätigungen desselben auffassen lassen; für Leiter erster Klasse sind es die von Peltier entdeckten Wärmewirkungen an den Löt-

stellen zweier Metalle, die allerdings nur dann direkt wahrnehmbar sind, wenn beträchtliche Elektrizitätsmengen in einem andauernden Strome durch die Trennungsfläche der Leiter geführt werden. Wirklich ist die erzeugte oder absorbierte Wärme der durchgegangenen Elektrizitätsmenge an Größe und Vorzeichen proportional; dagegen stimmen die daraus berechneten Werte der elektrischen Spannungen im allgemeinen durchaus nicht mit den Zahlen überein, welche die auf direktem elektrostatischen Wege gemessenen Voltaschen Spannungen angeben; letztere sind im allgemeinen viel größer. Immerhin kann man sich doch hier noch durch die Annahme helfen, daß wir es bei der sogenannten Voltaschen Spannung gar nicht mit der wirklichen Kontaktdifferenz der beiden Metalle zu tun haben, sondern daß die Anwesenheit von minimalen Mengen Gasen oder Dämpfen die Beschaffenheit der Oberflächen und damit den Wert der Spannung erheblich modifiziere, wie dies ja auch wirklich nachweisbar ist.[1])

Um ganz sicher zu gehen, ist es jedenfalls einstweilen das geratenste, beide Hypothesen dadurch zu vereinigen, daß man den fraglichen Energiebetrag: $-\varphi_0 \cdot \delta E$ zu unbestimmten Teilen auf die elektromolekulare und auf die gewöhnliche molekulare Energie verteilt; dann bleibt es zukünftiger Erfahrung noch vorbehalten, ob einer dieser Teile ganz verschwindet, beziehungsweise in welchem Verhältnis die beiden Energiearten an dem genannten Betrage partizipieren. Nach dieser Auffassung ist also die beim Durchgang der Elektrizitätsmenge δE von einem zum andern Metall entwickelte Wärme allgemein $-\varphi_0 \delta E - (u' - u)\delta E$.

Demnach stellt sich die Anwendung des Prinzips der Erhaltung der Energie auf den zum Ausgangspunkt unserer

1) Über diesen Punkt vgl. J. Cl. Maxwell: A treatise on electricity and magnetism. Oxford 1873. I. § 249. R. Clausius: Die mechanische Behandlung der Elektrizität. Braunschweig 1878, p. 172 ff.

Betrachtungen dienenden Fall folgendermaßen dar: Wenn sich mehrere elektrostatisch geladene metallische Leiter von gleicher Temperatur, die zum Teil isoliert, zum Teil miteinander in beliebiger Anzahl leitend verbunden sind (die Verallgemeinerung auf mehrere Leiter ergibt sich unmittelbar), in einem elektrischen Felde bewegen, so findet nicht nur zwischen der lebendigen Kraft der Bewegung und der elektrostatischen Energie ein Umsatz statt, sondern es treten außerdem an den Kontaktstellen der Leiter Wärmewirkungen auf, und zwar nach der eben aufgestellten Regel. (Dabei kann man durch sofortige Ableitung der erzeugten Wärme in die Umgebung bewirken, daß die Temperatur und somit die elektrische Spannung an den Kontaktstellen ungeändert bleibt.) Gegen diese Peltiersche Wärme verschwindet natürlich die Joulesche, welche im Innern der Leiter durch die strömende Elektrizität entsteht, als unendlich klein. (S. oben S. 232.) Merkwürdig ist hierbei, daß diese Verwandlung von lebendiger Kraft und Elektrizität in Wärme durch einen umkehrbaren Vorgang vermittelt wird, woraus sich für das Carnot-Clausiussche Prinzip interessante Schlüsse ergeben, die aber nicht in den Rahmen unserer jetzigen Untersuchung gehören.

Wenn in einem System sich berührender Leiter erster und zweiter Klasse die Erfüllung aller für das Gleichgewicht notwendiger Bedingungen unmöglich wird, wie dies z. B. im allgemeinen dann der Fall ist, wenn mehrere hintereinander verbundene Leiter durch Berührung des ersten mit dem letzten zu einer geschlossenen Kette vereinigt werden, so erfolgt eine Strömung von Elektrizität, die so lange andauert, bis durch das Eintreten gewisser chemischer, thermischer oder auch mechanischer Veränderungen die Möglichkeit für die Befriedigung sämtlicher Gleichgewichtsbedingungen geschaffen ist. Wir wollen uns zunächst nur mit dem Fall beschäftigen, daß die Strömung stationär geworden ist, d. h. daß alle auf den elektrischen Zustand des Systems bezüglichen Größen, wie Stromintensität, elektro-

statische Ladungen der Leiter, Potenzialfunktion usw. an einem bestimmten Ort von der Zeit unabhängig sind. Dann sind auch die elektrischen Energiearten (elektrostatische, elektrodynamische Energie) jedenfalls konstant und können deshalb ganz unberücksichtigt gelassen werden; dabei mögen in der Kette beliebige thermische und chemische Prozesse vor sich gehen.

Zuerst wenden wir das Energieprinzip in der Weise an, daß wir uns die Gesamtheit der die galvanische Kette bildenden Leiter als ein einziges System denken; da dasselbe gar keinen äußeren Wirkungen unterliegt, so ist seine Gesamtenergie konstant und mithin bleibt nach dem oben Gesagten die Summe der thermischen und chemischen Energie für sich unverändert. Daraus folgt der bekannte Satz: Die in einem stationären galvanischen Strome produzierten Wärmewirkungen sind den chemischen Wirkungen äquivalent.

Erhalten wir durch diesen Satz Aufschluß über das Größenverhältnis der von einem Strome in seinem ganzen Umkreis hervorgebrachten Wirkungen, so wissen wir dadurch noch nichts von den Veränderungen, welche in den einzelnen Teilen der Kette vor sich gehen; doch können wir auch hiervon Kenntnis gewinnen, wenn wir nicht das ganze Leitersystem, sondern irgend einen Teil desselben als Grundsystem der Anwendung des Energieprinzips unterwerfen. Nehmen wir zuerst einen schon von uns behandelten Fall: die Berührungsstelle zweier Leiter. Wir greifen aus dem ganzen Leitersystem ein Stück dadurch heraus, daß wir auf beiden Seiten einer Berührungsstelle zweier metallischer Leiter je eine Trennungsfläche gelegt denken, und zwar in solcher Nähe an der Kontaktstelle, daß im wesentlichen nur die Vorgänge in der Grenzschicht selber in Frage kommen. Der so abgegrenzte, aus zwei dünnen Metallamellen bestehende materielle Komplex, als Grundsystem betrachtet, wird durch den hindurchgehenden Strom gewisse Wirkungen von außen erleiden, welche seine Energie verändern, und zwar ergibt

der mechanische Arbeitswert der äußeren Wirkungen, wie immer, den Betrag des Wachstums der Energie. Nun kennen wir jenen Arbeitswert zwar nicht unmittelbar, aber wir können ihn hier berechnen durch das umgekehrte Verfahren, da wir durch die früheren Untersuchungen in den Stand gesetzt sind, die Energieänderung des betrachteten Systems anzugeben. Die elektrische Energie des Grundsystems bleibt nach der Voraussetzung ungeändert, die chemische ebenfalls, die thermische ändert sich aber nach dem auf S. 243 ausgesprochenen Grundsatz in der Zeiteinheit um: $-\varphi_0 \cdot i - (u' - u) \cdot i$, wenn i die Intensität des Stromes, φ_0 die Potenzialdifferenz der Leiter bezeichnet, positiv, wenn φ in der Richtung des Stromes wächst, endlich u und u' die S. 241 definierten Konstanten, wobei der Strom von u zu u' geht. Da nun die Energieänderung bekannt ist, so folgt, daß der mechanische Arbeitswert der aufgewendeten äußeren Wirkungen ebenfalls durch $-\varphi_0 \cdot i - (u' - u) \cdot i$ ausgedrückt wird.

Gehen wir nun über zu einem anderen Grundsystem, als welches wir wählen die Gesamtheit der Stromleiter, welche von dem ganzen Schließungskreise übrig bleibt, wenn man das eben behandelte lamellare Stück davon ausschließt. In diesem neuen System ist der Zuwachs der molekularen (thermischen und chemischen) Energie, und mithin auch der Arbeitswert der aufgewendeten äußeren Wirkungen, in der Zeiteinheit $= +\varphi_0 \cdot i + (u' - u) \cdot i$, weil im ganzen Schließungskreis die molekulare Energie unverändert bleibt. Jetzt fließt natürlich der Strom von u' zu u.

Wir sehen hieraus, daß der Arbeitsbetrag der aufgewendeten äußeren Wirkungen nur abhängig ist einmal von der Stromintensität, und dann von der Differenz der Werte der Potenzialfunktion φ und derjenigen der elektromolekularen Energie u an den beiden Grenzen des Systems. Daher können wir folgenden Satz aussprechen: „In einem metallisch begrenzten, im übrigen beliebig herausgegriffenen

Teil eines von einem stationären Strome durchflossenen Leitersystems, in welchem beliebige molekulare Veränderungen vor sich gehen, wird die molekulare (thermische und chemische) Energie in der Zeiteinheit um einen Betrag vermehrt, der gegeben ist durch das Produkt der Stromintensität in die Differenz der Werte der Potenzialfunktion φ plus der elektromolekularen Energie u an der Eintritts- und Austrittsstelle des Stromes." Ist das Eintrittsmetall identisch mit dem Austrittsmetall, so verschwindet das von der elektromolekularen Energie herrührende Glied. Dies gilt ganz unabhängig davon, ob und welche Sprünge die Potenzialfunktion im Innern des Systems macht.

Dieser Satz, der sich ebenso leicht für beliebige Stromverzweigungen sowie für räumlich veränderliche Stromdichten in körperlichen Leitern aussprechen läßt, ermöglicht eine Reihe von wichtigen Anwendungen.

Betrachten wir z. B. die im Innern eines metallischen Leiters ausgeübten Wirkungen, indem wir etwa ein unendlich kleines Stück eines unendlich dünnen Stromfadens von dem Querschnitt q und der Länge dn ins Auge fassen. Bezeichnet j die Stromdichte, so beträgt die Intensität des Stromes, welche durch das Leiterstück fließt: $j \cdot q$, die Abnahme der Potenzialfunktion aber: $-\frac{\partial \varphi}{\partial n} dn$, also die Veränderung der molekularen Energie (hier Wärmeerzeugung): $-j \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial n} \cdot q \cdot dn$. Da nun nach Joules Versuchen die Wärme $j^2 w \cdot q dn$ zum Vorschein kommt, wodurch w, der spezifische Widerstand des Leiters, definiert ist, so folgt durch Gleichsetzung der beiden Ausdrücke:

$$jw = -\frac{\partial \varphi}{\partial n}$$

das Ohmsche Gesetz für Leiter erster Klasse. Wenn im Innern des Leiters Temperaturdifferenzen bestehen, so werden dadurch im allgemeinen auch elektrische Spannungen hervorgerufen; dann ändert sich also das Potenzial-

gefälle und mithin die im Innern erzeugte Wärme (Thomsonscher Effekt).

Die Peltierschen Wirkungen haben wir schon oben besprochen; wenden wir uns daher jetzt noch zu den Vorgängen in den Leitern zweiter Klasse. Geht ein stationärer Strom zwischen zwei Elektroden des nämlichen Metalls durch einen Elektrolyten, in welchem er beliebige Wirkungen hervorbringt, so ist nach dem entwickelten Satze das Wachstum der molekularen Energie innerhalb und an der Oberfläche des Elektrolyten gleich dem Produkt aus der Stromintensität in die Potenzialdifferenz der positiven und der negativen Elektrode, einerlei ob im Innern lokale chemische Reaktionen stattfinden oder nicht. Ist so die Änderung der gesamten molekularen Energie eines Elektrolyten leicht anzugeben, so ist es doch wesentlich schwieriger, die an den beiden Elektrodenflächen stattfindenden Wirkungen voneinander zu trennen. Man hat zu diesem Zwecke ein Grundsystem zu betrachten, das einerseits von einem metallischen Leiter, andrerseits aber von einem Elektrolyten begrenzt wird, und für den Ein- oder Austritt des Stroms durch einen Leiter zweiter Klasse gilt unser Satz nicht ohne weiteres, weil die durch einen Elektrolyten in das System übertragenen äußeren Wirkungen nicht bloß durch strömende Elektrizität, sondern auch durch strömende Materie vermittelt werden. Durch den Übertritt der Ionen wird eine Wirkung besonderer Art auf das System ausgeübt, schon deshalb, weil die Ionen jedenfalls molekulare Energie mit sich führen; in diesem Falle kommt also der S. 165 unter 2) angeführte Grundsatz zur Anwendung.

Für das Innere eines Elektrolyten ist die Anwendung des Energieprinzips wieder einfach, da man wegen der Unveränderlichkeit der chemischen Zusammensetzung annehmen kann, daß in einem Raum, der ganz innerhalb eines Elektrolyten gelegen ist, von den Ionen ebensoviel Energie auf der einen Seite hineingeführt als auf der andern heraus-

genommen wird. Wir können also die äußeren Wirkungen dieser Art ganz vernachlässigen, und erhalten dann wieder genau wie oben die Joulesche Wärme, wie sie auch experimentell nachgewiesen ist, in Verbindung mit dem Ohmschen Gesetz. Durch dies Resultat ist es nun leicht gemacht, die Wirkungen an den Grenzflächen eines Elektrolyten gesondert von denen im Innern zu berechnen. Gesetzt, der Strom i fließt zwischen zwei Elektroden des nämlichen Metalls, in denen die Potenzialfunktion die Werte φ und φ' hat, durch einen Elektrolyten. Ferner betrage die Potenzialänderung von einer Elektrode bis in das Innere der zunächst angrenzenden unzersetzten Flüssigkeitsschicht: ϵ, beziehungsweiße ϵ', positiv, wenn die Potenzialfunktion in der Richtung des Stromes wächst. Dann ist nach dem Obigen die Änderung der gesamten molekularen Energie im Innern und an der Oberfläche des Elektrolyten in der Zeiteinheit: $(\varphi - \varphi') \cdot i$. Andrerseits ist die im Innern des Elektrolyten entwickelte molekulare Energie (Joulesche Wärme) gerade wie bei den Leitern erster Klasse gegeben durch das Produkt der Stromintensität in die Abnahme der Potenzialfunktion, also durch:

$$i \cdot ([\varphi + \epsilon] - [\varphi' - \epsilon'])$$

es bleibt also durch Subtraktion des letzten Wertes von dem ersten für die Entwicklung von molekularer Energie an den beiden Grenzflächen des Elektrolyten die Größe $-i \cdot (\epsilon + \epsilon')$ übrig, das Produkt aus der Stromintensität in die algebraische Summe der an beiden Elektroden wirkenden elektromotorischen Spannungen, natürlich einschließlich etwaiger Polarisationen. Wenn die Temperatur an beiden Elektroden konstant bleibt, so reduziert sich die molekulare Wirkung auf die Erzeugung chemischer Energie, und man kann daher die an beiden Elektrodenflächen wirkende elektromotorische Kraft $(\epsilon + \epsilon')$ direkt gleich setzen der von der Stromeinheit entwickelten chemischen Energie, d. h. der Wärmetönung, welche den

Vorgang der [illegible] Prozesse dann begleiten würde, wenn sie auf gewöhnlichem Wege, ohne Elektrizitätserregung, vor sich gingen. Im allgemeinen werden aber auch thermische Wirkungen (direkt oder sekundär) an den Elektrodenflächen auftreten, und demnach muß natürlich eine Steigerung modifiziert werden. Die gesonderte Berechnung der thermischen und der chemischen Wirkungen ist eine Aufgabe, in deren Lösung das Prinzip der Erhaltung der Energie allein nicht ausreicht.

Wir sehen hieraus, daß der Satz, nach welchem die an der Berührungsstelle zweier metallischer Leiter erzeugte molekulare Energie mit der Stromintensität zusammenhängt, auf Elektrolyte nur mehrere Anwendung findet, als die an beiden Elektrodenflächen zusammen entwickelte molekulare Energie durch die Stromintensität bestimmt wird. Das rührt eben daher, weil durch die Wanderung der Ionen in Elektrolyten ein gewisser Energiebetrag von der einen mit anderen Elektrode geführt wird, der sich nicht von vorneherein feststellen läßt. In bezug auf die Prozesse also, die sich an den Elektroden einzeln abspielen, läßt sich zurzeit aus dem Energieprinzip noch keine allgemeine Regel herleiten, indem die Untersuchungen darüber noch im vollen Gange sind. Jedenfalls hängen nach den von uns gemachten Ausführungen diese Vorgänge aufs innigste zusammen mit der Wanderung der Ionen, da die Frage nach der Energiemenge, welche durch sie zu den Elektroden hin-, bzw. von ihnen fortgeführt wird, hierbei eine entscheidende Rolle spielt; ihre Beantwortung dürfte für die Beurteilung dieser verwickelten Prozesse von wesentlicher Bedeutung sein; freilich bleibt dann noch die schon oben berührte Trennung der chemischen von den thermischen Wirkungen zu vollziehen übrig, die in neuerer Zeit mit Erfolg auf das Carnot-Clausiussche Prinzip gegründet wird.

Kehren wir nun zurück zu dem allgemeineren Fall, daß ein stationärer Strom zwischen zwei beliebigen metallischen

ektroden, mit den Potenzialfunktionen φ und φ' durch ein liebiges System von Leitern hindurchgeht; nach dem Obigen dann die Vermehrung der molekularen Energie in der iteinheit: $(\varphi - \varphi') \cdot i + (u - u') \cdot i$. Die nämliche Größe nnen wir aber auch andrerseits ausdrücken durch die irkungen, die im Innern und an den Grenzflächen der ızelnen Leiter erfolgen. Bezeichnet nämlich W die Summe mtlicher Widerstände der Leiter erster und zweiter Klasse nschließlich etwaiger Übergangs- oder sekundärer Widerınde), so ist die gesamte Joulesche Wärme: $i^2 \cdot W$. Ist ner ϵ die Summe aller im Leitersystem wirkenden elektrotorischen Kräfte (einschließlich etwaiger durch Tempetur- oder Strukturverschiedenheiten oder durch Polarisation Innern der Leiter bedingter Spannungen), so ist nach m Vorhergehenden die Summe aller hierdurch bedingter olekularer Wirkungen: $-i \cdot \epsilon + (u - u') \cdot i$. Somit haben r für die gesamte in der Zeiteinheit erfolgende Änderung r molekularen Energie den Ausdruck:

$$(3) \qquad i^2 \cdot W - i \cdot \epsilon + (u - u') \cdot i,$$

elcher, mit dem Obigen identifiziert, die Gleichung ergibt:

$$i \cdot W = \epsilon + \varphi - \varphi'$$

Übereinstimmung mit dem Ohmschen Gesetz. Fallen nfang und Ende des Leitersystems zusammen, so daß die eiter einen geschlossenen Kreis bilden, so wird $\varphi = \varphi'$, ıd wir erhalten die Ohmsche Formel in der Anwendung ıf die ganze Kette.

Es ist leicht, die angestellten Betrachtungen auf verveigte Ströme, sowie auf die gegenseitige Berührung von eitern zweiter Klasse auszudehnen; daher werfen wir nur ɔch einen kurzen Blick auf die Vorgänge in inkonstanten römen. Wird ein Leitersystem irgendwie elektromotorisch regt und dann sich selbst überlassen, so resultiert im lgemeinen ein mehr oder weniger schnell veränderlicher

Strom. Indem wir denselben aber nur während einer sehr kleinen Zeit betrachten, können wir ihn ganz von dem Gesichtspunkt der eben untersuchten stationären Ströme behandeln. Doch ist dabei zu berücksichtigen, daß hier nicht bloß die molekulare Energie, sondern auch die elektrische (elektrostatische und elektrodynamische) sich ändert, wodurch der Vorgang etwas verwickelter wird, da hierdurch die Einflüsse der Kapazität und der Selbstinduktion mit ins Spiel kommen. (Vgl. oben S. 75.)

Die Wechselwirkung magnetischer oder magnetisierter Körper läßt sich wesentlich aus denselben Voraussetzungen herleiten wie die elektrostatisch geladener Leiter und Dielektrika; wir können uns daher bei der Besprechung dieser Erscheinungen auf die dort (S. 233 bis 237) erhaltenen Resultate beziehen. Der Betrachtung legen wir wieder zugrunde ein System magnetischer oder magnetisierter Körper, die sich unter der Einwirkung ihrer wechselseitigen ponderomotorischen und magnetomotorischen Kräfte in einem nicht widerstehenden unpolarisierbaren Mittel bewegen. Dabei müssen wir eine Bedingung, die wir früher (S. 229) bei den elektrostatischen Wirkungen stellten, auch hier aufrecht erhalten: daß nämlich die relativen Geschwindigkeiten eine gewisse obere Grenze nicht überschreiten, da sonst in den bewegten Körpern gewisse elektrische Kräfte geweckt werden, welche ihre Wechselwirkung modifizieren können.

Die Wirkungen jedes Magneten lassen sich ersetzen durch die einer auf seiner Oberfläche in bestimmter Weise ausgebreiteten einfachen magnetischen Schicht (im allgemeinen noch verbunden mit einer bestimmten räumlichen Verteilung magnetischer Masse in seinem Innern). Auf diese fingierte magnetische Ladung beziehen sich die folgenden Definitionen.

Das magnetische Potenzial des Systems auf sich selbst beträgt: $P = \sum \frac{m \cdot m'}{r}$, in leicht verständlichen Zeichen,

oder auch: $P = \frac{1}{2}\sum m \cdot \varphi$, wenn die magnetische Potenzialfunktion: $\varphi = \sum \frac{m}{r}$. Durch den Ausdruck von P, der die Dimension einer Arbeit hat, ist zugleich auch die Einheit der Magnetismusmenge in magnetischem Maße gegeben.

Handelt es sich nur um permanente Magnete, so kommen nur ponderomotorische Wirkungen in Betracht, und die magnetische Energie U wird dargestellt durch das Potenzial P; befinden sich dagegen im magnetischen Felde auch magnetisierbare, paramagnetische oder diamagnetische Substanzen, so wird durch die Veränderlichkeit des temporären Magnetismus eine ebensolche des Potenzials P aller magnetischer und magnetisierter Körper bedingt, welche nicht der ponderomotorischen Wirkung zugute kommt. Machen wir die Voraussetzung, daß das magnetische Gleichgewicht sich für jede Konstellation des Systems momentan nach den Gleichungen von Poisson (S. 234) herstellt, wie man es für schwache Magnetisierungen in der Regel als richtig annehmen kann, so findet der Energieumsatz ebenso, wie im vorigen Falle, nur zwischen der lebendigen Kraft der molaren Bewegung und der magnetischen Energie U statt; jedoch wird U hier nicht mehr durch das Potenzial P gemessen, sondern durch den Ausdruck:

$$U = P + \int \frac{d\tau}{2\kappa}(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2),$$

den man durch die nämlichen Betrachtungen erhalten kann, wie den entsprechenden S. 236.

In ganz derselben Weise bestimmt sich der Wert der magnetischen Energie U für den Fall, daß in einem Körper permanenter und temporärer Magnetismus gleichzeitig enthalten ist; nur beziehen sich dann die Größen λ, μ, ν nicht auf das ganze magnetische Moment des Volumens $d\tau$, sondern allein auf das induzierte (temporäre) Moment. Fällt dieses fort, so reduziert sich U wieder auf P. — Man sieht

hieraus, daß, solange die Koerzitivkraft nur in der Richtung wirksam ist, permanenten Magnetismus aufrecht zu erhalten, im übrigen aber die Poissonschen Induktionsbedingungen gelten, jeder Verlust von magnetischer Energie vollständig ersetzt wird durch Gewinn an lebendiger Kraft, ähnlich wie bei der Bewegung von Punkten, die festen, von der Zeit unabhängigen Bedingungen unterliegen. Dies gilt auch dann noch, wenn statt der Poissonschen Magnetisierungsgleichungen irgend andere angenommen werden, wenn nur der temporäre Magnetismus als eine bestimmte Funktion der magnetisierenden Kraft auftritt. Wenn also das System aus einer Konstellation in eine bestimmte andere übergeht, einerlei auf welchem Wege, so muß, da die magnetische Energie hierdurch eine bestimmte Änderung erleidet, auch der Zuwachs an lebendiger Kraft, und mithin die ponderomotorische Arbeit, eine ganz bestimmte sein, während doch die Induktion in den magnetisierbaren Substanzen auf den verschiedenen Wegen in sehr verschiedener Weise erfolgen kann.

Sobald aber die Koerzitivkraft sich in einer Verzögerung der Herstellung des inneren magnetischen Gleichgewichts äußert, entsteht im allgemeinen ein Verlust von magnetischer Energie, der nicht gedeckt wird durch einen entsprechenden Zuwachs von lebendiger Kraft, so daß das Energieprinzip hier das Auftreten einer dritten Energieart (Wärme) fordert, ähnlich wie bei der Reibung bewegter Körper. Auch an die Veränderlichkeit des Magnetismus mit der Temperatur lassen sich wichtige Folgerungen aus dem Energieprinzip knüpfen; da dieselben jedoch erst durch die Heranziehung des zweiten Hauptsatzes der Wärmetheorie wesentlich fruchtbar werden, gehen wir hier nicht näher darauf ein. —

Bisher haben wir die elektrischen und die magnetischen Erscheinungen als zwei ganz von einander getrennte Gebiete behandelt, indem wir nur Wechselwirkungen von Elektrizi-

täten unter sich und Magnetismen unter sich ins Auge faßten; dadurch war es auch möglich, das elektrostatische und das magnetische Maßsystem gleichzeitig neben einander zu benutzen. Anders gestaltet sich aber das Verhältnis, wenn wir zur Betrachtung der elektromagnetischen Wirkungen schreiten, da durch sie zwischen den beiden genannten Gebieten gewissermaßen eine Brücke geschlagen wird, welche es erlaubt, nach Belieben entweder das elektrostatische Maßsystem in das magnetische Gebiet, oder auch umgekehrt das magnetische Maßsystem in das elektrische Gebiet zu übertragen. Dieser Übergang wird vollzogen durch den einen (Ampèreschen) Satz, der als das Grundgesetz aller elektromagnetischen Erscheinungen anzusehen ist, daß „ein lineärer elektrischer Strom von der Intensität i nach außen genau dieselben (ponderomotorischen, elektromotorischen und magnetomotorischen) Wirkungen ausübt, wie eine von der Stromkurve begrenzte, im entsprechenden bekannten Sinne belegte, magnetische Doppelschicht vom Moment ω, wenn $\omega = i$."

Hierdurch wird die Dimension des Moments einer magnetischen Doppelschicht (magnetische Flächendichte mal Länge) gleichgesetzt der einer Stromintensität (Elektrizitätsmenge dividiert durch Zeit), und man kann daher diese Gleichung nach Willkür dazu benutzen, entweder den Magnetismus durch Elektrizität, oder die Elektrizität durch Magnetismus zu messen, ist aber jedenfalls genötigt, sich für eines dieser beiden Verfahren zu entscheiden; wir wollen im folgenden das magnetische Maßsystem festhalten.

Denken wir uns nun den Fall, daß in einem unendlich ausgedehnten Felde sich beliebig viele permanente Magnete und lineäre, geschlossene, unverzweigte Stromleiter, in denen konstante galvanische Elemente tätig sind, unter wechselseitiger Einwirkung frei bewegen, wobei wir von den Einflüssen der Schwere absehen. Auch elektrostatisch geladene Körper (Leiter und Dielektrika) können sich im Felde befinden, wie ja ohnehin die Stromleiter ruhende freie Elek-

trizität enthalten. Jedoch wollen wir im folgenden die Kräfte, welche von der ruhenden Elektrizität ausgehen, und welche andererseits auf sie ausgeübt werden, ganz außer Betracht lassen, in der Voraussetzung, daß dieselben sich den Wechselwirkungen zwischen Strömen und Magneten einfach superponieren.

Allerdings ist diese Voraussetzung nicht strenge richtig, da es höchstwahrscheinlich ist, daß zwischen elektrostatisch geladenen (ruhenden) Körpern und bewegten Magneten oder veränderlichen Strömen gewisse ponderomotorische Wirkungen stattfinden[1]) ebenso, wie zwischen ruhenden Magneten und bewegter statischer (d. h. in den Leitern ruhender) Elektrizität.[2])

Wir können aber die Folgerungen, welche sich an diese an und für sich sehr schwachen Wirkungen knüpfen lassen, und die mit der Frage nach der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der elektromagnetischen Wirkungen unmittelbar zusammenhängen, dadurch umgehen, daß wir die Geschwindigkeit der Veränderungen des elektromagnetischen Feldes, wie sie durch Bewegungen der Magnete und Leiter, oder durch Schwankungen der Stromintensitäten hervorgerufen werden, so klein voraussetzen, daß sie gegen jene Fortpflanzungsgeschwindigkeit nicht in Betracht kommt — eine Bedingung, die sehr häufig erfüllt ist. Unter dieser Annahme verschwinden die genannten Wirkungen vollständig, und die von Ampère und F. Neumann begründete Theorie der elektromagnetischen und elektrodynamischen Wirkungen bildet ein in sich abgeschlossenes vollständiges und einwurfsfreies Ganzes.

1) H. Hertz: Über die Beziehungen zwischen den Maxwellschen elektrodynamischen Grundgleichungen und den Grundgleichungen der gegnerischen Elektrodynamik. Wied. Ann. 23, p. 8 1884.

2) H. v. Helmholtz: Bericht betr. Versuche über die elektromagnetische Wirkung elektrischer Konvektion, ausgeführt von A. Rowland. Pogg. Ann. 158, p. 487, 1876. Wiss. Abh. I, p.

Der Verlauf des in dem gegebenen System sich vollziehenden Prozesses ist vollständig bestimmt, wenn für irgend einen Zeitpunkt der Zustand des Systems bekannt ist, also der Inbegriff der Lagen, Geschwindigkeiten, Temperaturen, Stromintensitäten usw. (S. 120); alle diese Größen, auch die letztgenannten, müssen einzeln und unabhängig von einander gegeben sein; dann bestimmen sich daraus die zeitlichen Änderungen, und somit der ganze Vorgang in einer endlichen Zeit. Da die Gesamtenergie des Systems konstant bleibt, so ist ihre Änderung in einem Zeitintervall dt gleich 0; bilden wir den Ausdruck derselben. An verschiedenen Energiearten haben wir zu unterscheiden: die lebendige Kraft der Leiter und Magnete, die molekulare Energie der Leiter, endlich die durch das Vorhandensein der Ströme und Magnete bedingte elektrodynamische und magnetische Energie.

Das Wachstum der lebendigen Kraft ist gegeben durch die Arbeit sämtlicher von Strömen und Magneten ausgehenden ponderomotorischen Kräfte. Dabei wirkt nach dem Ampèreschen Grundsatz ein Strom i auf einen Magneten wie eine magnetische Doppelschicht vom Moment i, folglich nach dem mechanischen Prinzip der Wirkung und Gegenwirkung auch umgekehrt ein Magnet auf einen Strom mit einer entsprechenden ponderomotorischen Kraft, und endlich, da alle Wirkungen eines Magneten sich durch die eines Stromes ersetzen lassen, ein Strom auf einen andern in derselben Weise. Die ponderomotorische Arbeit zweier Magnete wird aber gemessen durch die Abnahme des magnetischen Potenzials, wenn man die Magnetismen als konstant betrachtet; daher bilden wir nun nach Analogie des magnetischen Potenzials U (der Magnete aufeinander) das elektromagnetische Potenzial V (der Magnete auf die Ströme i, wenn dieselben durch magnetische Doppelschichten i ersetzt gedacht werden) und das elektrodynamische Potenzial W (der Ströme i aufeinander, unter der glei

Voraussetzung; hier muß auch das Potential eines Stromes auf sich selbst mit einbegriffen werden, da ein Stromleiter auch auf seine eigenen Teile ponderomotorisch wirken kann). Dann ist:

$$V = i_1 v_1 + i_2 v_2 + \dots$$

wobei die Größen v von den Lagen der betreffenden Leiter und aller Magnete abhängen. Die Stromintensitäten i nehmen wir stets positiv. Ferner:

$$W = i_1 i_2 \cdot w_{12} + i_1 i_3 w_{13} + \dots .$$
$$+ \frac{i_1^2}{2} \cdot w_{11} + \frac{i_2^2}{2} \cdot w_{22} + \dots .$$

wobei die Größen w nur von den Lagen der Leiter abhängen. Es ist leicht, sie auf folgende Form zu bringen:

$$w_{12} = -\int\int ds_1 \, ds_2 \cdot \frac{\cos(ds_1, ds_2)}{r}$$
$$w_{11} = -\int\int ds_1 \, ds_1' \cdot \frac{\cos(ds_1, ds_1')}{r}$$

in leicht verständlicher Bezeichnung. Dabei sind die Bogenelemente ds in der Richtung positiv zu nehmen, in der sie vom Strom durchflossen werden; in dem Integral des Leiters auf sich selbst kommt jedes Bogenelement sowohl als ds wie auch als ds' vor, weil der Faktor $1/2$ schon in dem Ausdruck von W vorgesetzt ist.

Die gesuchte Arbeit der ponderomotorischen Kräfte, also die Gesamtzunahme der lebendigen Kraft von Leitern und Magneten ergibt sich daher als:

$$(4)\begin{cases} -dU - (i_1 dv_1 + i_2 dv_2 + \cdots) \\ -\left(i_1 i_2 dw_{12} + i_1 i_3 dw_{13} \cdots + \frac{i_1^2}{2} dw_{11} + \frac{i_2^2}{2} dw_{22} + \cdots\right) \end{cases}$$

Im Interesse der späteren Anwendung auf die ponderomotorische Arbeit in Systemen mit körperlichen Stromleitern

und mit Gleitstellen ist es nicht unwichtig, schon hier hervorzuheben, daß dieser Ausdruck nicht die vollständige Abnahme des gesamten Potenzials $U + V + W$ im Zeitelement dt vorstellt, sondern nur diejenige partielle Abnahme, die durch die Bewegung der Körper entsteht, wenn die Stromintensitäten und die Magnetismen alle als konstant betrachtet werden.

Die zweite zu berücksichtigende Energieart ist die molekulare (thermische und chemische) Energie der Leiter. Bezeichnet w den Widerstand, E die galvanische elektromotorische Kraft eines Leiterkreises (positiv, wenn sie im Sinne von i wirkt), so ist nach S. 251 die in ihm während der Zeit dt erzeugte molekulare Energie: $(i^2 \cdot w - i \cdot E) \cdot dt$. Für einen sich selbst überlassenen stationären Strom ist sie $= 0$. Nennen wir nun: $i \cdot w - E = e$ die im Leiterkreis induzierte elektromotorische Kraft, wodurch das Ohmsche Gesetz auch auf induzierte Ströme anwendbar wird, so wird demnach die Zunahme der molekularen Energie in allen Leitern dargestellt durch:

$$(5) \qquad (i_1 e_1 + i_2 e_2 + \cdots) \cdot dt.$$

Endlich handelt es sich noch um die Zunahme derjenigen Energieart, die durch das Vorhandensein der Ströme und Magnete bedingt ist. Setzen wir sie $= Q$, so erhalten wir für den entsprechenden Energiezuwachs:

$$(6) \qquad dQ.$$

Nach dem Prinzip der Erhaltung der Energie ist die Summe der Ausdrücke (4), (5) und (6) gleich 0, was wir symbolisch ausdrücken durch:

$$(4) + (5) + (6) = 0.$$

Diese Gleichung läßt sich auf zweierlei Weise verwerten: entweder kann man aus ihr, wenn Q bekannt ist, die Werte

der induzierten elektromotorischen Kräfte e (und zwar jede einzelne) berechnen, oder man kann, wenn die e gegeben sind, den Wert von Q finden; beides zugleich leistet aber das Energieprinzip nicht (vgl. S. 52). Wir wollen hier den letztgenannten Weg einschlagen, indem wir das von F. Neumann unabhängig von unserem Prinzip aufgestellte Induktionsgesetz[1]) zur Anwendung bringen. Ganz willkürlich sind übrigens auch ohne das die Werte der e nicht; so z. B. sieht man schon von vorneherein, in welcher Weise sie von der Zeit abhängig sind, da das Differenzial dt explizite nur in (5) vorkommt.

Nach F. Neumann ist die in einem geschlossenen Leiter in positiver Richtung induzierte elektromotorische Kraft gleich dem nach der Zeit genommenen Differenzialquotienten des Potenzials aller Magnete und Ströme auf den vom Strome 1 in positiver Richtung durchflossen gedachten Leiter, multipliziert mit einer positiven absoluten Konstanten ϵ, die wir hier unbestimmt lassen können. D. h. z. B.:

$$e_1 = \epsilon \cdot \frac{d}{dt}(v_1 + i_1 w_{11} + i_2 w_{12} + i_3 w_{13} + \ldots).$$

Hier ist bei w_{11} (Koeffizient der Selbstinduktion) der Faktor $\frac{1}{2}$ weggelassen, weil in diesem Ausdruck jede Kombination zweier Leiterelemente zweimal vorkommen muß, je nachdem eins derselben vom Strome i_1 oder vom Strome 1 durchflossen wird.

Durch Substitution dieser Werte der e in den Ausdruck (5) erhalten wir aus der Gleichung der Erhaltung der Energie:

---

1) Franz Ernst Neumann: Allgemeine Gesetze der induzierten Ströme. Abh. d. kgl. Akad. d. Wiss. Berlin 1845. Pogg. Ann. 67, p. 31, 1846.

F. Neumann: Über ein allgemeines Prinzip der mathematischen Theorie induzierter elektrischer Ströme. Abh. der kgl. Akad. der Wiss. Berlin 1847. G. Reimer 1848.

$$
\begin{aligned}
dQ = dU &+ (i_1 dv_1 + i_2 dv_2 + \cdots) \\
&+ \left(i_1 i_2 dw_{12} + i_1 i_3 dw_{13} + \cdots \right. \\
&\left. + \tfrac{i_1^2}{2} dw_{11} + \tfrac{i_2^2}{2} dw_{22} + \cdots\right) \\
&- \epsilon i_1 d(v_1 + i_1 w_{11} + i_2 w_{12} + i_3 w_{13} + \cdots) \\
&- \epsilon i_2 d(v_2 + i_1 w_{12} + i_2 w_{22} + i_3 w_{23} + \cdots) \\
&- \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

Da dQ ein vollständiges Differenzial, so folgt:

$$\epsilon = 1 \quad \text{(vgl. S. 50) und}$$

$$Q = U - \left(i_1 i_2 w_{12} + i_1 i_3 w_{13} + \cdots + \tfrac{i_1^2}{2} w_{11} + \tfrac{i_2^2}{2} w_{22} + \cdots\right)$$

oder, mit Berücksichtigung des Wertes von W:

$$Q = U - W.$$

Demnach besteht die durch das Vorhandensein von Magneten und Strömen bedingte Energie aus zwei Arten: der magnetischen Energie, gemessen durch das positive magnetische Potenzial U, wie früher, und der elektrodynamischen (elektrokinetischen) Energie, gemessen durch das negative elektrodynamische Potenzial W, während dagegen das elektromagnetische Potenzial V gar keinen Beitrag zur Energie liefert. Über diesen Umstand werden wir unten noch ausführlicher zu sprechen haben. Zunächst sollen die aufgestellten Gleichungen auf einige einfache Fälle kurz Anwendung finden.

Wenn im Felde gar kein Magnet und nur ein einziger Stromkreis vorhanden ist, so reduziert sich die Energie Q auf $-\frac{i_1^2}{2} \cdot w_{11}$, und die Gleichung der Erhaltung der Summe der drei Energiearten lautet:

$$\left[-\tfrac{i_1^2}{2} dw_{11}\right] + \left[i_1 e_1 dt\right] - d\left[\tfrac{i_1^2}{2} \cdot w_{11}\right] = 0.$$

Für einen starren Leiter ist w_{11} unveränderlich, also die ponderomotorische Arbeit = 0, und es bleibt die Selbstinduktion $e_1 = w_{11} \cdot \frac{di_1}{dt}$. Da w_{11} nach seiner Definition wesentlich negativ ist, so besitzt e_1 das entgegengesetzte Vorzeichen wie $\frac{di_1}{dt}$. Daraus berechnet sich nach dem Ohmschen Gesetz (S. 259) die Stromstärke i_1, wenn sie zu einer bestimmten Zeit beliebig gegeben ist. Hier haben wir also nur Umwandlungen verschiedener Energiearten innerhalb des Stromkreises, während die Gesamtenergie des Leiters konstant bleibt.

Für einen Leiter und einen Magneten tritt noch die durch die ponderomotorischen Wirkungen erzeugte lebendige Kraft hinzu; dann erhalten wir die entsprechende Gleichung:

$$\left[-i_1 dv_1 - \frac{i_1^2}{2} dw_{11}\right] + \left[i_1 e_1 dt\right] - d\left[\frac{i_1^2}{2} \cdot w_{11}\right] = 0.$$

wobei:
$$e_1 = \frac{d(v_1 + i_1 w_{11})}{dt}.$$

Wenn man von der Selbstinduktion des Stromes absieht, also $w_{11} = 0$ setzt, kann man i_1 am Anfang der Bewegung nicht mehr beliebig wählen, sondern die Stromstärke ist dann unmittelbar gegeben, weil das Glied mit $\frac{di_1}{dt}$ aus der Gleichung fortfällt und daher durch die Ohmsche Formel eine Bedingung zwischen „Zustandsgrößen“ (S. 121) hergestellt wird.

Betrachten wir die Energie des Stromleiters für sich allein als Grundsystem genommen (lebendige Kraft, Molekularenergie, elektrokinetische Energie), so erleidet sie eine Veränderung nur durch die äußeren Einwirkungen. Dieselben bestehen erstens in der ponderomotorischen Arbeit, welche der Magnet an dem Leiter leistet, und durch welche die lebendige Kraft des Leiters vermehrt wird, zweitens in

der Induktionswirkung des Magneten auf den Leiter, deren Arbeitswert: $i_1 \cdot \frac{dv_1}{dt} \cdot dt$ zur Vermehrung der Molekularenergie des Leiters verwendet wird, wie man unmittelbar aus der obigen Gleichung ablesen kann. Machen wir umgekehrt den Magneten zum Grundsystem, so besteht seine Energie nur aus der lebendigen Kraft seiner Bewegung, und die einzige Wirkung, die vom Strom auf ihn ausgeübt wird, ist die ponderomotorische Arbeit, durch welche seine lebendige Kraft verändert wird. Die Wechselwirkungen zwischen Magneten und Strömen sind also nicht vollständig gegenseitig, worauf wir sehr bald zurückkommen werden.

Denkt man sich den Magneten durch einen zweiten Strom ersetzt, so erfolgen die ponderomotorischen und die Induktionswirkungen in entsprechender Weise nach beiden Seiten hin. Dann wird die Energie jedes einzelnen Leiters in der Zeit dt vermehrt 1) durch die an ihm von außen geleistete ponderomotorische Arbeit, die in lebendige Kraft übergeht, und 2) durch die äußere Induktionsarbeit (Produkt der von außen induzierten elektromotorischen Kraft in seine Stromstärke multipliziert mit dt), welche zur Molekularenergie beiträgt. Die übrigen Änderungen von lebendiger Kraft und Molekularenergie werden geliefert von der eigenen elektrokinetischen Energie des Leiterkreises. Bemerkenswert ist hier ferner der Umstand, daß vermöge der besonderen Form, in der die elektrokinetische Energie auftritt, die Gesamtenergie der beiden Stromleiter nicht einfach die Summe der Energien der einzelnen Leiter ist, während in dem Falle eines Leiters und eines Magneten der entsprechende Satz Gültigkeit hat.

Gehen wir nun zurück zu dem allgemeinen Fall beliebig vieler permanenter Magnete und Ströme und fassen den Ausdruck der dadurch gegebenen Energie $Q = U - W$ noch etwas näher ins Auge. Derselbe enthält kein Glied, welches, analog der lebendigen Kraft bewegter ponderabler Massen,

auf eine Trägheit der bewegten Elektrizitäten schließen läßt[1]), ebensowenig eins, welches eine direkte Wechselwirkung zwischen Elektrizität und ponderabler Materie anzeigt[2]), sondern besteht nur aus dem magnetischen und dem elektrodynamischen Potenzial. Auf den ersten Anblick möchte es als eine Art Ungereimtheit erscheinen, daß das magnetische Potenzial U mit positivem Vorzeichen, das elektromagnetische V gar nicht, das elektrodynamische W dagegen mit negativem Vorzeichen in den Wert der Energie eingeht; denn da wir die elektromagnetischen und die elektrodynamischen Wirkungen direkt aus den rein magnetischen abgeleitet haben, so liegt die Vermutung nahe, die drei genannten Potenziale als vollkommen gleichartig und gleichberechtigt anzusehen, und in der Tat: sobald wir einen Magneten mit einem Strom geradezu identifizieren, ist der Schluß unvermeidlich, daß dann auch das magnetische Potenzial bei der Energiebildung genau dieselbe Rolle spielt wie das elektromagnetische und das elektrodynamische. Indessen liegt die Sache hier anders. Wir haben die Ableitung der elektromagnetischen und elektrodynamischen Wirkungen aus den magnetischen allein auf den allgemein erwiesenen Erfahrungssatz (S. 255) gegründet, daß ein Strom genau dieselben (ponderomotorischen und Induktions-) Wirkungen ausübt wie eine magnetische Doppelschicht von entsprechenden Eigenschaften. Daraus folgt aber noch nicht, daß Strom und Magnet sich überhaupt identisch verhalten; denn sonst müßten sie caeteris paribus auch dieselben Wirkungen erleiden. Aber nur bezüglich der ponderomotorischen Kräfte läßt sich eine Gleichheit auch der passiven Wirkungen aus dem mechanischen Prinzip der Wirkung und

1) H. R. Hertz: Versuche zur Feststellung einer oberen Grenze für die kinetische Energie der elektrischen Strömung. Wied. Ann. 10, p. 414, 1880, Wied. Ann. 14, p. 581, 1881.

2) Vgl. R. Colley: Nachweis der Existenz der Maxwellschen elektrom. Kraft Y_{me}. Wied. Ann. 17, p. 55, 1882.

Gegenwirkung ableiten (S. 257), dagegen ist für die Induktionswirkungen diese Gleichheit keineswegs vorhanden. Während nämlich in einem Strome durch äußere elektromotorische Kräfte gewisse Energieänderungen hervorgerufen werden, bleibt der innere Zustand eines entsprechenden an dieselbe Stelle gesetzten permanenten Magneten, der immer als nichtleitend für Elektrizität vorgestellt werden kann, nach der von uns aufgestellten Gleichung der Erhaltung der Energie vollkommen ungeändert.

Dieser Umstand wird gut illustriert durch folgendes Beispiel. Denken wir uns einen permanenten Magneten in der Form einer gleichmäßig magnetisierten Doppelschicht, und damit fest verbunden einen linearen konstanten, etwa hydroelektrischen Strom, der die Grenzlinie der magnetischen Fläche so durchfließt, daß die von dem Magneten ausgehenden Wirkungen gerade aufgehoben werden; dies System wird, ob es sich bewegt oder nicht, keinerlei Kräfte, weder ponderomotorische noch induzierende, in der Umgebung ausüben. Wenn also ein anderer permanenter Magnet oder auch Strom sich in der Nähe irgendwie bewegt, so wird derselbe sich genau ebenso verhalten, als ob er ganz allein im Raume vorhanden wäre: seine Geschwindigkeit bleibt ungeändert usw. Nicht so ist es aber mit unserem kombinierten System von Magnet und Strom. Während im Magneten sich nichts ändert, werden im Strom durch die Bewegung des äußeren Magneten Induktionswirkungen hervorgerufen, also molekulare Energie erzeugt. Diese Energie entsteht aber offenbar hier nicht auf Kosten der lebendigen Kraft des induzierenden Magneten, sondern auf Kosten der magnetischen Energie U, die durch das Vorhandensein der beiden Magnete bedingt ist. Wird der Strom unterbrochen (wozu keine Arbeitsleistung gehört), so kommt diese Energie zur ponderomotorischen Wirksamkeit. — Ähnlich verhält es sich, wenn an die Stelle des äußeren Magneten ein Strom gesetzt wird, nur kommt dann nicht die magnetische, sondern

die elektrokinetische Energie: das negativ genommene elektrodynamische Potenzial W ins Spiel. Man sieht hieraus, wie notwendig es ist, die Trennung in dem Verhalten permanenter Magnete und dem ihnen äquivalenter Ströme durchzuführen.

Die im Vorstehenden durchgeführte Anwendung des Prinzips der Erhaltung der Energie auf die Wechselwirkungen von Magneten und Strömen gründet sich allein auf Tatsachen der Erfahrung, sie ist insbesondere, worauf wir namentlich Wert legen, unabhängig von jeglicher spezielleren Vorstellung über die Natur des Magnetismus. Wenn wir uns nun aber der von vorneherein sehr plausiblen Annahme Ampères anschließen, daß die Magnete nichts anderes sind, als Systeme von entsprechend orientierten Molekularströmen, so erleidet die Anwendung des Energieprinzips eine wesentliche Modifikation. Alle magnetischen und elektromagnetischen Wirkungen gehen dann in elektrodynamische über und müssen als solche behandelt werden. Es gibt nur noch ein elektrodynamisches Potenzial, dessen Größe ist: $(U + V + W)$, und dementsprechend nur eine elektrokinetische Energie, die dem Potenzial gleich und entgegengesetzt ist. Ferner ist die innere Energie eines permanenten Magneten nicht mehr konstant, sondern — und über diesen Schluß kann keine Hypothese über die Natur der Molekularströme hinweghelfen — sie ändert sich in endlicher Weise bei einer endlichen Änderung des magnetischen Feldes, in dem er sich befindet. Wie man sich diese Veränderlichkeit im einzelnen vorzustellen hat, ist eine Frage, die nicht hierher gehört, wo wir es nur mit den unmittelbaren Ergebnissen der Erfahrung zu tun haben, und die erst im Zusammenhang mit allgemeineren weiter unten kurz zu berührenden Problemen beantwortet werden kann.

Wie bei der Wechselwirkung lineärer unverzweigter Ströme und permanenter Magnete, so lassen sich die Gesetze von Ampère und F. Neumann auch in dem allge-

meineren Falle körperlich ausgedehnter geschlossener Leiter und beliebiger magnetisierbarer Körper mit gleich befriedigendem Erfolge der Anwendung des Energieprinzips zugrunde legen, nur hat man dann wieder wie bei den rein magnetischen Wirkungen (S. 253) zwischen magnetischer Energie U und magnetischem Potenzial P zu unterscheiden; im übrigen behalten die vorgetragenen Sätze ihren Wortlaut vollständig bei.

Eine besondere Bemerkung erfordern noch die durch das Vorhandensein von Gleitstellen in körperlich ausgedehnten Leitern bedingten Wirkungen, schon weil dieselben in der historischen Entwickelung der Theorie der Stromwirkungen eine interessante Rolle spielen. Wir haben schon oben (S. 259) darauf besonders aufmerksam gemacht, daß die bei irgend einer Veränderung des elektromagnetischen Feldes von den Strömen und Magneten geleistete ponderomotorische Arbeit gemessen wird nicht etwa durch die wirkliche, vollständige zeitliche Abnahme des gesamten magnetischen, elektromagnetischen und elektrodynamischen Potenzials $U + V + W$, sondern durch diejenige partielle Abnahme dieser Größe, welche bei unveränderlich gedachten Stromintensitäten und Magnetismen durch die Bewegungen der Körper hervorgerufen wird. Wenn nun körperlich ausgedehnte Leiter, die auch mechanische Deformationen erleiden können oder mit Gleitstellen behaftet sind, sich im Felde bewegen, so hat man die Unveränderlichkeit der Stromintensitäten natürlich dahin zu verstehen, daß in jedem ponderablen Teilchen die Stromintensität die nämliche bleibt; daher können sich bei Deformationen oder Gleitstellen die Stromfäden bei der Bewegung biegen oder dehnen, dürfen aber nicht abgerissen werden. Man kann sich nämlich in jedem beliebig gegebenen Falle die vollständige zeitliche Änderung des Potenzials zusammengesetzt denken aus zwei nacheinander erfolgenden partiellen Änderungen, die folgenden beiden Vorgängen entsprechen: 1) die ponderablen

Leiterteile gehen in ihre neue Lage über, während die Stromfäden in ihnen erhalten bleiben, 2) die Stromfäden und Stromintensitäten nehmen, während die Leiter ruhen, die durch die neue Konstellation bedingte Größe und Richtung an. Nur die erste partielle Änderung kommt bei der Berechnung der ponderomotorischen Arbeit in betracht. Die Anwendung dieser Vorschrift führt stets zu richtigen Resultaten; denn alle Einwände, welche gegen diesen (in der vorliegenden verallgemeinerten Form zuerst von Helmholtz[1]) ausgesprochenen) Satz erhoben worden sind, beruhen auf einer unberechtigten Verwechselung der beschriebenen partiellen Änderung des Potenzials mit der vollständigen (welche für gewisse elektrodynamische Rotationen = 0 ist).

Denken wir uns z. B. den einfachen Fall, daß ein linearer Stromleiter L mit seinem einen Ende längs der Oberfläche eines leitenden Körpers K (etwa Quecksilber) gleitet. Der Strom, der durch L nach K fließen möge, verbreitet sich beim Austritt aus L nach allen Seiten durch K. Die bei der angenommenen Bewegung geleistete ponderomotorische Arbeit findet man durch die Betrachtung einer unendlich kleinen Verschiebung des Leiters längs der leitenden Oberfläche, etwa vom Punkte A der Fläche zu einem benachbarten Punkt B, und durch Berechnung derjenigen (partiellen) Änderung des Gesamtpotenziales des Stromes auf sich selbst, die sich ergibt, wenn die Stromintensität dabei in allen Leiterteilen konstant gedacht wird. Der Strom ist also nach vorgenommener Verschiebung nicht etwa von L durch B direkt nach K hineinfließend vorzustellen, sondern von L durch B erst linear nach A, und von da in der nämlichen Weise wie vorher durch K hindurch. Hierbei heben wir noch besonders hervor, daß in dem Ausdruck des Potenzials, wie immer bei Selbstpotenzialen, jede Kombination zweier Stromelemente nur einmal vorkommt. (Vgl. den allgemeinen Ausdruck der ponderomotorischen Arbeit S. 258).

1) H. v. Helmholtz: Wiss. Abh. I. p. 692.

Ganz ähnlich, wenn auch etwas verwickelter, gestaltet sich die Anwendung des F. Neumannschen Induktionsprinzipes auf den vorliegenden Fall. Bei der Berechnung der zeitlichen Änderung des Potenzials aller Ströme und Magnete auf eine vom Strome 1 durchflossene Leitung hat man genau zu unterscheiden zwischen den Veränderungen der Ströme und Magnete, die induzierend wirken, und den Veränderungen der Stromleitung, in welcher eine elektromotorische Kraft induziert wird. Bei den ersteren ist immer die wirkliche, vollständige Änderung der Stromintensitäten, einerlei ob Gleitstellen vorhanden sind oder nicht, und der Magnetismen in Rechnung zu bringen, in der letzteren dagegen ist der Strom 1 in derselben Weise unveränderlich fließend zu denken, wie es oben dargestellt wurde, d. h. so, daß die Stromfäden auch bei eintretenden Deformationen ihre Lagen in den ponderablen Leiterteilen behalten und auch bei Gleitstellen nicht abgerissen werden.

Um also z. B. die Selbstinduktion des vorhin betrachteten Stromes zu finden, der durch den linearen Leiter L in den körperlichen Leiter K fließt, längs dessen Oberfläche L gleitet, hat man zunächst zu bilden das Potenzial (zurzeit t) des Stromes $L - A - K$ von der Intensität i auf die vom Strome 1 durchflossen gedachte nämliche Leitung $L - A - K$, wobei also jede Kombination zweier Leiterelemente zweimal vorkommt, und diesen Ausdruck zu subtrahieren von dem Potenzial (zurzeit $t + dt$) des vollständig veränderten Stromes, der mit seiner neuen Intensität $i + \frac{di}{dt} dt$ durch L fließt und sich von dem neuen Berührungspunkt B aus direkt in den Leiter K verbreitet, auf die vom Strome 1 durchflossen gedachte Leitung $L - B - A - K$, wobei die Stromfäden in K gerade so liegen, wie zur Zeit t. Dividiert man die gefundene Differenz durch dt, so ergibt sich die induzierte elektromotorische Kraft. Nur unter Beachtung der angegebenen

Regel führt das Neumannsche Induktionsprinzip auch für körperliche Leiter immer zu richtigen Resultaten.

Bei der gleichförmigen elektrodynamischen Rotation ist die Stromstärke i und die elektrokinetische Energie konstant, in der Tat findet man leicht, daß die ponderomotorische Arbeit gleich ist dem Arbeitswert der elektromotorischen Wirkungen, d. h. daß die zur Aufrechterhaltung der Rotation (Überwindung der Reibungswiderstände) nötige Arbeit geliefert wird von der molekularen Energie der Stromleiter. Auch alle Erscheinungen der magnetelektrischen, einschließlich der sogenannten unipolaren Induktion finden auf die angegebene Weise ihre unmittelbare Erklärung. Allerdings bleibt hierbei die Frage nach den in den einzelnen Leiterteilen wirkenden ponderomotorischen oder elektromotorischen Kräften noch vollständig offen.[1])

So tritt uns die Ampère-Neumannsche Theorie der Wechselwirkungen geschlossener Ströme und Magnete als ein durch das Energieprinzip innerlich zusammenhängendes vollendetes System entgegen, welches die feste, durch die Ergebnisse zahlreicher Experimente gesicherte Basis für fernere Untersuchungen bildet. Ob man sich dabei die Wirkungen der einzelnen Stromelemente nach dem Ampèreschen oder nach dem Graßmannschen[2]) Elementargesetz oder auch nach dem Helmholtzschen Potenzialgesetz erfolgend denken will, bleibt dem Geschmack des Einzelnen überlassen.

Eine innere Lücke[3]) zeigt diese Theorie nur dann,

---

1) Vgl. hierüber E. Riecke: Zur Theorie der unipolaren Induktion und der Plückerschen Versuche. Gött. Nachr. 1876, p. 332. (Wied. Ann. 1, p. 110, 1877.) Wied. Ann. 11, p. 413, 1880. Ferner F. Koch: Untersuchungen über magnetelektrische Rotationserscheinungen. Wied. Ann. 19, p. 143, 1883.

2) H. Graßmann: Neue Theorie der Elektrodynamik. Pogg. Ann. 64, p. 1, 1845.

3) H. Hertz: Über die Beziehungen zwischen den Maxwellschen elektrodynamischen Grundgleichungen und den Grundgleichungen der gegnerischen Elektrodynamik. Wied. Ann. 23, p. 84, 1884.

wenn man eine am Anfang von uns gemachte Voraussetzung (S. 256) fallen läßt, nämlich die, daß die Schnelligkeit der Änderungen des elektromagnetischen Feldes gegen die kritische Geschwindigkeit nicht in Betracht kommt. In diesem Falle machen sich gewisse Erscheinungen geltend, die als Äußerungen des Umstandes aufzufassen sind, daß die elektromagnetischen Wirkungen zu ihrer Fortpflanzung Zeit brauchen.

Bezeichnender Weise sind bis jetzt alle über das Wesen der Elektrizität aufgestellten Theorien, so wesentlich sie sich auch nach Ursprung und Ideengang unterscheiden — selbst diejenigen, welche von der Voraussetzung einer unmittelbaren Fernewirkung ausgehen — bei ihrer weiteren Entwicklung an diesem einen Punkte angelangt. Schon Gauß[1]) betrachtete die Ableitung der durch die Bewegung der Elektrizität hervorgerufenen Kräfte aus einer nicht instantanen, sondern sich mit endlicher Geschwindigkeit fortpflanzenden Wirkung als den „Schlußstein" der Elektrodynamik und bezeichnete das Scheitern seiner dahin gerichteten Bemühungen geradezu als den Grund, weshalb er das von ihm aufgestellte elektrische Grundgesetz noch nicht als reif für die Öffentlichkeit erachte. B. Riemann[2]) verfolgte ähnliche Gedanken, und C. Neumann[3]) gelang es in ausgezeichneter Weise, das Webersche Grundgesetz zurückzuführen auf die Annahme, daß das gewöhnliche elektrostatische Potenzial sich mit bestimmter Geschwindigkeit nach allen Seiten gleichmäßig ausbreitet und daß diese Ausbreitung die alleinige Ursache ist, weshalb die

---

1) C. F. Gauß: Brief an W. Weber. Werke V, p. 627. Vgl. R. Clausius: Über die von Gauß angeregte neue Auffassung der elektrodynamischen Erscheinungen. Pogg. Ann. 135, p. 606, 1868.

2) B. Riemann: Ein Beitrag zur Elektrodynamik. Pogg. Ann. 131, p. 237, 1867.

3) C. Neumann: Die Prinzipien der Elektrodynamik. Gött. Nachr. 1868, p. 223. Ferner: Math. Ann. I, p. 317, 1868. VIII, p. 555, 1875.

elektrischen Kräfte auch von den Geschwindigkeiten und Beschleunigungen der wirkenden Elektrizitätsteilchen abhängig erscheinen.

Es frägt sich nun aber, ob eine solche Vorstellung überhaupt noch verträglich ist mit der Annahme einer unvermittelten Fernewirkung, und ob nicht die Voraussetzung einer endlichen Fortpflanzungsgeschwindigkeit der elektrischen Wirkungen direkt dazu nötigt, mit Faraday, Maxwell und vielen andern Physikern eine die Fortpflanzung begleitende und vermittelnde Veränderung des Zwischenmediums anzunehmen. Denn der Zustand eines elektrischen Systems kann doch nicht von der Zeit explizite abhängig sein, sondern nur von den physikalischen Änderungen, welche die materiellen Teile des Systems (einschließlich des Äthers) in dem betreffenden Zeitpunkt erlitten haben. Auch das Clausiussche[1]) Grundgesetz, welches ohne jede Rücksicht auf ein vorhandenes Zwischenmedium abgeleitet ist, kann der Mitwirkung eines solchen nicht entbehren, da eine wirklich „absolute" Geschwindigkeit physikalisch gar nicht definierbar ist.

Wenn nun schon die wesentliche Bedeutung des Zwischenmediums für das Zustandekommen der elektrisch-magnetischen Wirkungen anerkannt wird, so liegt der Gedanke nahe, die reine Fernewirkung ganz aufzugeben, und dem Zwischenmedium die vollständige Vermittlung jener Wirkungen zu übertragen, oder mit andern Worten: — nach einer Ausdrucksweise von C. Neumann — alle „teleskopischen" Wirkungen auf „mikroskopische" zurückzuführen.

Vor dieser prinzipiellen Frage müssen nach meinem Dafürhalten alle andern zurückstehen, wie die, ob man zwei verschiedene Arten von Elektrizität zu unterscheiden hat, ob

1) R. Clausius: Über ein neues Grundgesetz der Elektrodynamik. Pogg. Ann. 156, p. 657, 1875. Crelle J. 82, p. 85, 1876. Die mechanische Behandlung der Elektrizität. Braunschweig, 1879, p. 277.

es ungeschlossene Ströme gibt, und wenn ja, wie sich dann die Wechselwirkungen zweier Stromelemente aus den Wechselwirkungen geschlossener Ströme ableiten lassen, ferner wie man sich die Molekularströme in den Magneten zu denken hat, welches endlich das Grundgesetz der elektrischen Wirkungen ist usw. Denn je nach der Beantwortung der Hauptfrage wird die Reihe der Vorstellungen und damit der Gang der Spekulation in gänzlich verschiedenartige Bahnen gelenkt, ja, dieselbe bedeutet eventuell eine förmliche Umwälzung aller unserer durch Newton überkommenen und zur Gewohnheit gewordenen Anschauungen über das Wesen der in der Natur tätigen Kräfte. Denn wenn wir auch nach Newtons eigenem Vorgang nur die Erscheinung als das Gegebene betrachten und die Frage nach Prozessen, die sich etwa sonst noch irgendwo abspielen mögen, die sich aber einstweilen der Wahrnehmung entziehen, gänzlich unberührt lassen, so wird unsere jetzige Naturanschauung doch im großen und ganzen durchdrungen und beherrscht von der Vorstellung der unmittelbaren Wirkung in die Ferne, in der kosmischen wie in der molekularen Welt, d. h. wir glauben, daß zwischen den Gestirnen, zwischen den Atomen nichts weiter vorgeht, was mit den Bewegungen dieser Körper in einem notwendig bedingenden Zusammenhang steht — eine Anschauung, die darin ihren guten Grund hat, daß wir in der Tat bei der Bewegung der Gestirne von derartigen Vorgängen keine Wahrnehmung haben, während sie bei den Atomen nur auf einem Analogieschluß beruht.

Und doch: sollte es definitiv gelingen, — und dafür ist gegenwärtig ein hoher Grad von Wahrscheinlichkeit vorhanden — die Gesamtheit der elektrischen Erscheinungen auf Kräfte zurückzuführen, die nur in unendlich kleinen Entfernungen wirken, so kann wohl kaum ein Zweifel darüber obwalten, daß wir uns auch daran werden gewöhnen müssen, die Wirkungen der Gravitation, die doch so viel einfacheren Gesetzen folgen, und infolgedessen auch die chemischen

Erscheinungen, von demselben Gesichtspunkt aus zu betrachten; denn die Vereinfachung, die durch die neue Anschauung in alle unsere Naturvorstellungen gebracht wird, kann, wie wir noch in der Folge näher darzutun uns bemühen werden, nicht leicht hoch genug geschätzt werden. An dieser Aufgabe wird die Unbequemlichkeit, einer durch lange Zeiten hindurch festgewurzelten Ideenverbindung zu entsagen, nichts ändern können; denn so gut es der mühsamen Arbeit vieler Jahrhunderte bedurfte, die Vorstellung einer unmittelbaren Fernewirkung zur lebendigen Gewohnheit zu machen, so gut muß es gelingen, diese Gewohnheit wieder abzustreifen, wenn einmal wirklich festgestellt ist, daß jene Vorstellung ihren Dienst getan hat.

Ohne allzu voreilig der endgültigen Erscheinung dieser fundamentalen Frage vorzugreifen, wollen wir am Schluß unserer Untersuchungen noch die hauptsächlichsten Folgen hervorheben, welche aus der allgemeinen Durchführung der neuen Theorie für die Anwendung des Prinzips der Erhaltung der Energie entspringen. In Ermangelung eines kurzen passenden Namens für diese Theorie werde ich mir im folgenden erlauben, dieselbe als Infinitesimaltheorie zu bezeichnen.

Zunächst ist es wichtig, zu betonen, daß die beiden sich gegenüberstehenden Theorien keineswegs als koordiniert zu betrachten sind, sondern daß die Theorie der Fernewirkung sich als die allgemeinere erweist, geradeso wie eine endliche Größe eine unendlich kleine als speziellen Fall in sich enthält. Denn nach der Infinitesimaltheorie hängen die Kräfte, welche auf die Teile eines Körpers wirken, nur von seinem eigenen Zustand ab, nach der andern Theorie dagegen außerdem noch von sämtlichen Körpern, welche das ganze Universum erfüllen; dieser Umstand bildet auch den Grund, weshalb wir uns in unserer bisherigen Darstellung und Ausdrucksweise mehr an die allgemeinere Vorstellung der direkten Fernewirkung gehalten haben. Wenn die In-

finitesimaltheorie sich also bestätigt, so ist damit zugleich ein neues allgemeines Naturgesetz erwiesen, nämlich das Gesetz, daß alle Veränderungen, die in und an irgend einem materiellen Element vor sich gehen, vollständig bestimmt sind durch die augenblicklichen Vorgänge innerhalb und an der Grenze des Elements. Es versteht sich, daß dieser Satz tief hineingreift in das Wesen und die Wirkungsweise aller Naturkräfte.

Dadurch gewinnt nun auch der Begriff der Energie eine wesentlich einfachere Bedeutung, indem sich das Verhalten der Energie noch enger an das der Materie anschließt. Die Menge der Materie kann in der Welt weder vermehrt noch vermindert werden, aber, was noch mehr sagt, Materie kann auch nicht an einem Orte verschwinden, um gleichzeitig an einem andern endlich davon entfernten Orte wieder aufzutauchen, sondern sie kann nur stetig mit der Zeit ihren Platz wechseln. Die Menge der in einem geschlossenen Raum befindlichen Materie kann nur dadurch verändert werden, daß durch die Grenzfläche des Raumes Materie ein- oder austritt, und die Größe der Veränderung wird gemessen gerade durch das die Fläche passierende Quantum.

Mit der Energie steht es anders, solange die Theorie der Fernewirkung aufrecht erhalten wird. Zwar bleibt die Summe der Energien in der Natur unverändert, jedoch kann die Energie plötzlich aus einem Körper in einen endlich davon entfernten übergehen, ein Planet kann seine lebendige Kraft unmittelbar auf einen andern übertragen, ein Magnet erzeugt durch die Energie seiner Bewegung momentan Wärme in einer induzierten Stromleitung usw. Nach der Infinitesimaltheorie dagegen kann Energie, wie Materie, nur stetig mit der Zeit ihren Ort verändern. Die in einem geschlossenen Raum befindliche Energie kann vermehrt oder vermindert werden nur durch solche äußere Wirkungen, die durch physikalische Vorgänge in der Grenzfläche des Raumes vermittelt werden, man kann also auch hier von einem Hin-

durchgehen der Energie durch diese Fläche reden. Dann läßt sich die Energie eines materiellen Systems stets in Elemente zerlegen, deren jedes einem bestimmten materiellen Element zukommt und in diesem ihren Platz findet (während z. B. die potenzielle Energie zweier aus der Ferne aufeinander wirkenden Körper immer nur als ein unteilbares Ganzes auftritt). Wenn daher mehrere materielle Systeme in ein einziges zusammengefaßt werden, so ist die Energie des Gesamtsystems gleich der Summe der Energien der Einzelsysteme — ein Satz, der der Infinitesimaltheorie eigentümlich ist. (Vgl. S. 138.)

Bei dieser großartigen Vereinfachung der Naturanschauung, wie sie die Infinitesimaltheorie bietet, wird es der physikalischen Forschung um so dringender nahe gelegt, die Berechtigung dieser Theorie eingehend zu prüfen, indem ihre Konsequenzen bis ins Einzelne aufgedeckt werden; denn nur dadurch erlangt man die Mittel, sie entweder zu bestätigen oder zu widerlegen. Und zwar ist es offenbar zunächst von größter Wichtigkeit, das Wesen dieser Theorie vollkommen zu trennen von allen Hypothesen, mit denen man der Anschauung zu Hilfe kommt, die aber mit der Theorie an und für sich nichts zu tun haben. Die Schwierigkeiten, welche dabei unserem Vorstellungsvermögen erwachsen können, kommen durchaus nicht in Betracht; daß z. B. der Äther sich nicht so verhält wie einer der uns bekannten festen, flüssigen oder gasförmigen Körper, ist ein Umstand, welcher der Infinitesimaltheorie nicht die mindeste Verlegenheit bereitet. Wir werden uns mit der Zeit an die spezifische Wirkungsweise des Äthers ebenso gewöhnen können, wie an die Eigenschaften, die uns irgend ein anderer Körper zeigt, und werden dieselbe dann bald in die Reihe der uns durch vielfache Erfahrung vertrauten Erscheinungen aufnehmen.

Allerdings ist nicht zu leugnen, daß durch die Annahme eines besonderen, von allen bekannten so wesentlich ver-

schiedenartigen Mediums unserem Streben nach möglichst einfacher Naturbeschreibung nicht gedient wird; indes ist ja doch die Vereinfachung, welche die einheitliche Durchführung der Infinitesimaltheorie im ganzen Bereich der Natur gewährt, unendlich viel höher zu veranschlagen, als der Nachteil, der durch die Einführung eines neuen Körpers erwächst, welcher ja ohnehin in der Theorie des Lichtes unentbehrlich ist und schon dort durch seinen hohen Grad von Elastizität und seine minimale Dichte in der Reihe der festen Körper eine ganz exzeptionelle Stellung einnimmt. Jedenfalls darf die endgültige Entscheidung dieser Frage als eine der wertvollsten Errungenschaften bezeichnet werden, welche für die nächste Zeit der naturwissenschaftlichen Forschung in Aussicht stehen.

Schließlich möchte ich hier noch auf eine bemerkenswerte Analogie hinweisen. Man glaubte früher, daß alles Geschehen in der Natur, der geistigen wie der physischen, seinen Grund und seine ausreichende Erklärung findet nicht allein in gleichzeitig wirkenden Umständen, sondern daß im allgemeinen sowohl Vergangenes wie auch Zukünftiges (Teleologie) direkt mitbestimmend in den Gang der Dinge eingreift und so das Kausalitätsgesetz beeinflußt. Die moderne Naturwissenschaft — und darin beruht gerade der mächtige Vorsprung, den sie vor der antiken voraus hat — hat diesen Glauben zerstört, sie nimmt an, daß in letzter Linie der gegenwärtige Zustand: das, was gerade augenblicklich in der gesamten Welt vorgeht, die vollständig bestimmende Ursache dessen bildet, was im nächsten Moment eintreten wird, daß also in der fortlaufenden Kette der Veränderungen jedes Glied durch das unmittelbar vorhergehende selbständig und in seinem ganzen Umfange bedingt wird. Mit anderen Worten: In bezug auf zeitliche Wirkungen ist die Infinitesimaltheorie zur durchgreifenden Anerkennung gelangt. Den nächsten Jahrzehnten dürfte es vorbehalten sein, dasselbe für die räumlichen Wirkungen durchzuführen, indem

gezeigt wird, daß es einen unvermittelten Einfluß aus der räumlichen Ferne ebensowenig gibt wie aus der zeitlichen Ferne, sondern daß alle räumlichen Wirkungen ebenso wie die zeitlichen in letzter Linie zusammengesetzt erscheinen aus solchen Wirkungen, die sich von Element zu Element verbreiten. Dann findet jede Erscheinung ihre vollständige Erklärung in den räumlich und zeitlich unmittelbar benachbarten Umständen, und alle endlichen Prozesse setzen sich aus Infinitesimalwirkungen zusammen. Dieser zweite Schritt scheint sich mir vollkommen ebenbürtig an den ersten anzureihen, dem wir in so hervorragendem Maße die Erfolge der heutigen Naturwissenschaft verdanken, und man ist berechtigt, zu erwarten, daß auch er sich von ähnlich weittragender Bedeutung für ihre Weiterentwicklung erweisen wird.

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin.

Abraham, M., Theorie der Elektrizität. In 2 Bänden. gr. 8. geb.

Einzeln:

I. Band: Einführung in die Maxwellsche Theorie der Elektrizität. Mit einem einleitenden Abschnitte über das Rechnen mit Vektorgrößen in der Physik. Von A. Föppl. 3., vollständig umgearbeitete Auflage von M. Abraham. Mit 11 Figuren im Text. XVIII, 460 S. 1907. n. *M.* 12.—

II. „ Elektromagnetische Theorie der Strahlung. Von M. Abraham. Mit 5 Figuren. X, 406 S. 1905. n. *M.* 10.—

Böcher, M., über die Reihenentwicklungen der Potentialtheorie, Mit Vorwort von F. Klein. Mit 113 Textfiguren. VIII, 258 S. gr. 8. 1894. geh. n. *M.* 8.—

Bryan, G. H., Thermodynamics. An introductory treatise dealing mainly with first principles and their direct applications. In englischer Sprache. XIV, 204 S. gr. 8. 1907. geb. n. *M.* 7.—

Bucherer, A. H., mathematische Einführung in die Elektronentheorie. Mit 14 Textfiguren. II, 148 S. gr. 8. 1904. geb. n. *M.* 3.20.

—— Elemente der Vektoranalysis. Mit Beispielen aus der theoretischen Physik, 2. Aufl. VIII, 103 S. gr. 8. 1905, geb. n. *M.* 2.40.

Burkhardt, H., Entwicklungen nach oszillirenden Funktionen. Bericht, erstattet der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. A. u. d. T.: Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. X. Band. II. Heft. In 2 Halbbänden. XII. 1804 S. gr. 8. 1908. geb. je n. *M.* 30.—

Emden, R., Gaskugeln. Anwendungen der mechanischen Wärmetheorie auf kosmologische und meteorologische Probleme. Mit 24 Figuren, 12 Diagrammen und 5 Tafeln im Text. VI, 498 S. gr. 8. 1907. geb. n. *M.* 13.—

Ferraris, Gal., wissenschaftliche Grundlagen der Elektrotechnik, deutsch von L. Finzi. Nach den Vorlesungen über Elektrotechnik im R. Museo Industriale zu Turin. Mit 161 Textfiguren. XII, 358 S. gr. 8. 1901. geb. n. *M.* 12.—

Fleming, J. A., elektrische Wellen-Telegraphie. Vier Vorlesungen. Autorisierte deutsche Ausgabe von E. Aschkinaß. Mit 53 Abbildungen. IV, 185 S. gr. 8. 1906. geh. n. *M.* 4.20, geb. n. *M.* 5.—

Föppl, A., die Geometrie der Wirbelfelder. In Anlehnung an das Buch des Verfassers über die Maxwellsche Theorie der Elektrizität und zu dessen Ergänzung. X, 108 S. gr. 8. 1897. geh. n. *M.* 3.60, geb. n. *M.* 4.40.

Gans, R., Einführung in die Vektoranalysis mit Anwendungen auf die mathematische Physik. Mit 31 Textfiguren. X, 100 S. gr. 8. 1905. geb. n. *M.* 2.80.

Jahnke, E., Vorlesungen über die Vektorenrechnung. Mit Anwendungen auf Geometrie, Mechanik und mathematische Physik. Mit 32 Textfiguren. XII, 236 S. gr. 8. 1905. geb. n. *M.* 5.60.

Kiellhauser, E., die Stimmgabel, ihre Schwingungsgesetze und Anwendungen in der Physik. Eine auf fremden Untersuchungen fußende Monographie. Mit 94 Textfiguren. VIII, 188 S. gr. 8. 1907. geb. n. *M.* 6.—

Kohlrausch, F., Lehrbuch der praktischen Physik. Mit Textfiguren. 10., umgearbeitete Auflage des Leitfadens der praktischen Physik. XXVIII, 656 S. gr. 8. 1905. geb. n. *M.* 9.—

—— kleiner Leitfaden der praktischen Physik. 2., vermehrte Auflage. Mit zahlreichen Figuren im Text. XVIII, 268 S. gr. 8. 1907. geb. n. *M.* 4.—

Lamb, H., Lehrbuch der Hydrodynamik. Deutsche autorisierte Ausgabe, nach der 3. englischen Auflage besorgt von Joh. Friedel. Mit 79 Figuren im Text. XIV, 788 S. gr. 8. 1907. geb. n. *M.* 20.—

Lorentz, H. A., Abhandlungen über theoretische Physik. In 2 Bänden. I. Band. Mit 40 Textfiguren. IV, 489 S. gr. 8. 1907. geh. n. *M.* 16.—, geb. n. *M.* 17.— Band II befindet sich unter der Presse.

—— Versuch einer Theorie der elektrischen und optischen Erscheinungen in bewegten Körpern. Unveränderter Abdruck der 1895 bei J. Brill in Leiden erschienenen 1. Auflage. III, 138 S. gr. 8. 1906. geb. n. *M.* 3.20.

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin.

Love, A. E. H., Lehrbuch der Elastizität. Autorisierte deutsche Ausgabe unter Mitwirkung des Verfassers besorgt von A. Timpe. Mit 75 Abbildungen im Text. XVI, 664 S. gr. 8. 1907. geb. n. *M.* 16.—

Physik. Unter Mitwirkung von: M. Abraham, L. Boltzmann, G. E. Bryan, P. Debye, H. Dubois, H. Diesselhorst, S. Finsterwalder, R. Gans, F. W. Hinrichsen, E. W. Hobson, J. H. van t'Hoff, H. Kamerlingh-Onnes, Th. Liebisch, H. A. Lorentz, L. Mamlock, G. Mie, H. Minkowski, O. Mügge, J. Nabl, F. Pockels, L. Prandtl, R. Reiff, K. Runge, A. Schönflies, M. Schröter, E. Study, A. Wangerin, W. Wien, J. Zenneck. Herausgegeben von A. Sommerfeld-München. A. u. d. T.: Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen. Band V. Man verlange Prospekt!

Pockels, Fr., Lehrbuch der Kristalloptik. Mit 168 Textfiguren und 6 Doppeltafeln. X, 519 S. gr. 8. 1906. geb. n. *M.* 16.—

Richarz, F., neuere Fortschritte auf dem Gebiete der Elektrizität. In wissenschaftlich-gemeinverständlicher Weise dargestellt. 2. Auflage. Mit 97 Abbildungen. VI, 128 S. gr. 8. 1902. geb. n. *M.* 1.50.

Schuster, A., Einführung in die theoretische Optik. Autor. deutsche Ausgabe. Übersetzt von H. Konen. Mit 2 Tafeln und 185 Figuren im Text. XIV, 413 S. gr. 8. 1907. geh. n. *M.* 12.—, geb. n. *M.* 13.—

Starke, H., experimentelle Elektrizitätslehre. Mit besonderer Berücksichtigung der neueren Anschauungen und Ergebnisse. Mit 275 Textabbildungen. XIV, 422 S. gr. 8. 1904. geb. n. *M.* 6.—

Thomson, J. J., Elektrizitäts-Durchgang in Gasen. Deutsche autor. Ausgabe, unter Mitwirkung des Autors besorgt und ergänzt von E. Marx. Mit 187 Textfiguren. VII, 587 S. gr. 8. 1906. geh. n. *M.* 18.—, geb. n. *M.* 19.—

Voigt, W., Magneto- und Elektrooptik. Mit 75 Textfiguren. XIV, 396 S. gr. 8. 1908. geh. n. *M.* 14.—

Volkmann, P., Einführung in das Studium der theoretischen Physik, insbesondere in das der analytischen Mechanik. Mit einer Einleitung in die Theorie der physikalischen Erkenntnis. XVI, 370 S. gr. 8. 1900. geh. n. *M.* 9.—, geb. n. *M.* 10.20.

Webster, A. G., the Dynamics of Particles, and of rigid, elastic, and fluid Bodies, being Lectures on mathematical Physics. Mit zahlr. Textfiguren. XII, 588 S. gr. 8. 1904. geb. n. *M.* 14.— [Deutsche Ausgabe in Vorbereitung.]

Wiechert, E., Grundlagen der Elektrodynamik. 112 S. gr. 8. 1899. geh. n. *M.* 3.60.

Wien, W., über Elektronen. Vortrag, gehalten auf der 77. Versammlung deutscher Naturforscher und Ärzte in Meran. 28. S. gr. 8. 1905. geh. n. M 1.—

Wüllner, A., Lehrbuch der Experimentalphysik. In 4 Bänden. Jeder Band ist einzeln käuflich.

I. Band: Allgemeine Physik und Akustik. 6., verbesserte Aufl., bearbeitet von A. Wüllner und A. Hagenbach. Mit 333 in den Text gedruckten Abbildungen und Figuren. XIV, 1058 S. gr. 8. 1907. geh. n. *M.* 16.—, geb. n. *M.* 18.—

II. „ Die Lehre von der Wärme. 5. Auflage. Mit 131 Abbildungen und Figuren im Text. XI, 936 S. gr. 8. 1896. geh. n. *M.* 12.—, geb. n. *M.* 14.—

III. „ Die Lehre vom Magnetismus und der Elektrizität mit einer Einleitung: Grundzüge der Lehre vom Potential. 5. Auflage. Mit 341 Abbildungen und Figuren im Text. XV, 1415 S. gr. 8. 1897. geh. n. *M.* 18.—, geb. n. *M.* 20.—

IV. „ Die Lehre von der Strahlung. 5. Auflage. Mit 299 Abbildungen und Figuren im Text und 4 lithographierten Tafeln. XII, 1042 S. gr. 8. 1899. geh. n. *M.* 14.—, geb. n. *M.* 16.—

Bei gleichzeitigem Bezug aller 4 Bände ermäßigt sich der Gesamtpreis auf geh. n. *M.* 44.—, geb. n. *M.* 50.—